

Fiche de révision – Probabilité sur un univers fini

1. Ensemble des événements

• Espace probabilisable.

L'univers Ω : l'ensemble des résultats possibles.

L'ensemble des événements : $\mathcal{P}(\Omega)$

• Vocabulaire.

$\bar{A}$: événement contraire.

$\emptyset$: événement impossible.

Ω : l'événement certain.

$\{\omega\}$: événement élémentaire.

$A \cap B = \emptyset$: Événements incompatibles.

$\omega \in A$: ω réalise A .

• Propriétés

$$\bar{\emptyset} = \Omega \quad \bar{\Omega} = \emptyset \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A \quad \bar{\bar{A}} = A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

• Système complet d'événements.

$(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un syst. complet d'événements signifie :

$$\textcircled{1} \bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega \quad \text{et} \quad \textcircled{2} \underbrace{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset}_{2 \text{ à } 2 \text{ incompatibles}}$$

2. Probabilité

• Définition.

$$\textcircled{1} \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \textcircled{2} \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\textcircled{3} \text{ Pour tout } (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2,$$

$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

• Propriétés.

Théorème :

Si $A_1, \dots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Proposition :

$$\bullet \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

$$\bullet \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\bullet \text{ si } A \subset B \text{ alors } \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

$$\bullet \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$$

• Formule des probabilités totales (Version 1)

Si $(A_1, \dots, A_n)$ un SCE alors pour $B \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

• Cas d'équiprobabilité.

Définition : Les événements élémentaires ont tous la même probabilité.

Théorème : Dans un cas d'équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

3. Conditionnement

• Probabilité conditionnelle.

Lorsque $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

$\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

• Formule des probabilités totales (Version 2)

Si $(A_1, \dots, A_n)$ un SCE alors pour $B \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

• Formule des probabilité composées.

Si $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) =$$

$$\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

• Formule de Bayes.

Si $(A_1, \dots, A_n)$ un SCE alors pour $B \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

4. Indépendance

• Indépendance de deux événements.

A et B sont **indépendants** : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

• Indépendance mutuelle.

$A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants :

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

• Expériences indépendantes.

Lorsque $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ sont indépendantes alors

$$\textcircled{1} \text{ si } A \text{ est un événement de } \mathcal{E}_i \text{ alors } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_i(A)$$

$\textcircled{2}$ si $A_1, \dots, A_p$ sont p événements d'expériences distinctes,

alors $A_1, \dots, A_p$ sont **mutuellement indépendants**.