

L'objectif de ce devoir n'est pas de le réussir parfaitement, mais de vous apprendre à travailler de manière efficace et réfléchie. Commencez par lire tout le sujet, puis stabilisez avec des couleurs différentes les questions : - celles que vous pensez pouvoir faire seul.

- celles que vous voulez chercher en réfléchissant un peu.

- celles qui vous semblent plus difficiles que vous ferez s'il vous reste du temps.

Choisissez un temps de travail précis, puis entraînez-vous à rester concentré pendant toute sa durée. Vous pouvez le fractionner si cela vous aide. (*Se concentrer une heure sans musique ni téléphone c'est déjà très bien*)

Si vous demandez de l'aide (*à un camarade, un professeur, un parent, une IA*), notez dans votre copie sur quelle question et en quoi cela vous a aidé (*savoir demander et comprendre une explication, c'est déjà progresser*)

Prenez soin de rédiger clairement, de soigner votre présentation et d'exposer vos raisonnements avec rigueur.

La notation de ce devoir ne dépendra pas du nombre de questions correctement traitées, comme c'est le cas pour un DS, mais du respect des consignes données en classe et dans cette introduction (*n'oubliez pas d'encadrer les conclusions, de numéroté les pages 1/n, 2/n, ... , n/n, mettre votre nom/prénom sur chaque copie, utiliser des copies doubles.*)

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E l'ensemble des matrices réelles carrées de taille n .

On appelle trace l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice $M = (m_{i,j})$ de E associe le réel : $\sum_{i=1}^n m_{i,i}$

On note : $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$

- 1) Rappeler la définition du produit de deux matrices de E .
- 2) Montrer que la multiplication des matrices carrées n'est pas une opération commutative.
Autrement dit : donner deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $AB \neq BA$.
- 3) Montrer que la multiplication des matrices carrées est une opération associative.
Autrement dit : Démontrer que si A , B et C sont trois matrices de E alors $(AB)C = A(BC)$.
- 4) Démontrer que si A et B sont deux matrices de E alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- 5) Montrer qu'on n'a pas toujours pour A , B et C dans E : $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$.
Autrement dit : donner trois matrices A , B et C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$.

Exercice 2

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, on note : $E = \llbracket 1; n \rrbracket^p$.

Le but de cette question est de montrer que : $\sum_{\ell \in E} \min(\ell) = \sum_{k=1}^n k^p$

- 1) Rappeler le cardinal de E .
- 2) Montrer le résultat pour $p = 2$.

On note dans la suite : $\bullet \quad S = \sum_{\ell \in E} \min(\ell)$

- $\bullet$ Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $A_i = \{ \ell \in E \mid \min(\ell) = i \}$
- $\bullet$ Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $B_k = \{ \ell \in E \mid \min(\ell) \geq k \}$

- 3) En remarquant que pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $B_k = \llbracket k; n \rrbracket^p$, déterminer le cardinal de B_k .
- 4) Pour chaque $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, exprimer B_k en fonction des ensembles A_i .

- 5) Justifier que : $S = \sum_{i=1}^n i \cdot \text{card}(A_i)$.

- 6) En déduire que S peut s'exprimer en fonction du cardinal des ensembles B_k .

(On pourra pour cela utiliser une somme double).

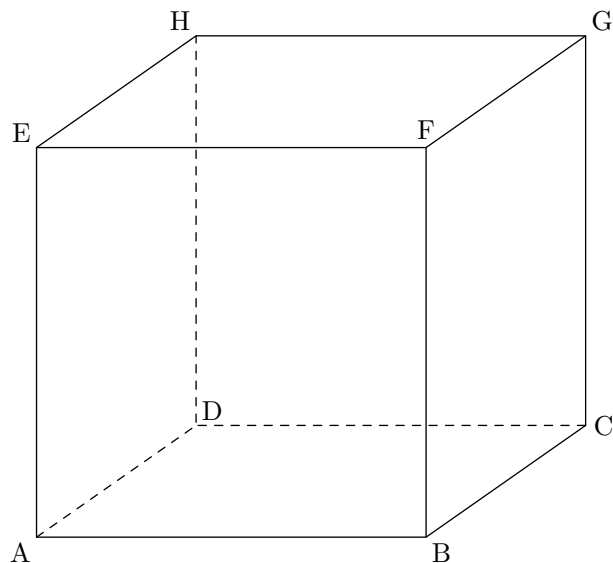
- 7) Conclure.

- 8) Laquelle des deux sommes pensez-vous être la plus efficace à implémenter en Python ?

Justifiez votre réponse en terms de nombre d'opérations ou de temps d'exécution.

Problème 1

On s'intéresse dans cet exercice au déplacement aléatoire d'un point mobile sur les sommets d'un cube.



Un point mobile se déplace sur les arêtes de ce cube de sommet en sommet.

On notera A - B - C - G le chemin de longueur 3 allant de A à G en passant par B et C.

Remarque : A - B - C - D - A est un chemin de longueur 4 partant de A et revenant à A.

Questions préliminaires :

1) Chemins de longueur 2.

- Combien de chemins de longueur 2 mènent de A à F ?
- Combien de chemins de longueur 2 mènent de A à A ?
- Combien de chemins de longueur 2 mènent de A à E ?
- Combien de chemins de longueur 2 partent de A ?

Remarque : parmi ces chemins il y a ceux qui reviennent en A, comme A - B - A.

2) Chemins de longueur 3.

- Combien de chemins de longueur 3 mènent de A à G ?
- Combien de chemins de longueur 3 mènent de A à A ?
- Combien de chemins de longueur 3 partent de A ?

On construit la matrice d'adjacence de ce cube :

chaque case de ce tableau indique si les sommets sont reliés par une arête.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	1	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	0	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0	0	1	0
D	1	0	1	0	0	0	0	1
E	1	0	0	0	0	1	0	1
F	0	1	0	0	1	0	1	0
G	0	0	1	0	0	1	0	1
H	0	0	0	1	1	0	1	0

On note alors cette matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On donne ci-dessous M^2 et M^4 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 21 & 0 & 20 & 20 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 21 & 0 & 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 21 & 20 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 21 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 21 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 20 & 0 & 21 & 0 \\ 20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Que représentent les matrices M^n ?

- 1) Calculer M^3 .
- 2) Pour n un entier naturel, que représente, d'après vous, les coefficients de M^n ?
Il s'agit ici d'émettre une conjecture, que vous appuieriez sur des observations.
Pour simplifier on numérottera les points : A est le point 1, B le point 2, C, ... , H le point 8.
- 3) Démontrer la conjecture faite à la question précédente.
On pourra raisonner par récurrence en utilisant la définition du produit matricielle.

Partie 2 : Etude des matrices M^n .

- 1) a) Déterminer deux réels α et β tels que : $\alpha M^4 + \beta M^2 = 9I_8$.
 b) En déduire que M est inversible.
 c) Donner les coefficients de M^{-1} .
- 2) a) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$M^{2n} = a_n M^2 + b_n I_8 \quad \text{avec}$$

$$a_0 = 0 \quad b_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 10a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -9a_n$$
 b) Déterminer une relation linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite (a_n) .
 c) En déduire une expression de a_n puis de b_n en fonction de l'entier n .
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$,
 a) Montrer que les coefficients diagonaux de M^{2n} sont tous égaux à : $\frac{9^n + 3}{4}$.
 b) Déterminer les coefficients diagonaux de M^{2n+1} .

Partie 3 : La marche aléatoire sur le cube.

Un point mobile se déplace de manière aléatoire sur les arêtes du cube en partant du point A.

On modélise les n premiers déplacements par la probabilité uniforme sur les 3^n chemins possibles.

On note pour tout entier k ,

R_k : « après le k ème déplacement le mobile se retrouve en A »

On pourra utiliser les matrices données en fin d'exercices. (ou pas !)

- 1) Pour un entier n non nul, quelle est la probabilité qu'après n déplacements le mobile se retrouve à sa position de départ.
- 2) a) Calculer $\mathbb{P}(\overline{R_2})$.
 b) Si on suppose que $\overline{R_2}$ est réalisé, où se trouve le point mobile après le deuxième déplacement ?
 en déduire $\mathbb{P}_{\overline{R_2}}(\overline{R_4})$.
 c) Quelle est la probabilité qu'il revienne à sa position de départ au huitième déplacement et pas avant ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'au cours des 7 premiers déplacements il ne passe jamais par le même sommet ?

On donne ci-dessous d'autres puissances de M .

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 61 & 0 & 61 & 61 & 0 & 60 & 0 \\ 61 & 0 & 61 & 0 & 0 & 61 & 0 & 60 \\ 0 & 61 & 0 & 61 & 60 & 0 & 61 & 0 \\ 61 & 0 & 61 & 0 & 0 & 60 & 0 & 61 \\ 61 & 0 & 60 & 0 & 0 & 61 & 0 & 61 \\ 0 & 61 & 0 & 60 & 61 & 0 & 61 & 0 \\ 60 & 0 & 61 & 0 & 0 & 61 & 0 & 61 \\ 0 & 60 & 0 & 61 & 61 & 0 & 61 & 0 \end{pmatrix} \quad M^6 = \begin{pmatrix} 183 & 0 & 182 & 0 & 0 & 182 & 0 & 182 \\ 0 & 183 & 0 & 182 & 182 & 0 & 182 & 0 \\ 182 & 0 & 183 & 0 & 0 & 182 & 0 & 182 \\ 0 & 182 & 0 & 183 & 182 & 0 & 182 & 0 \\ 0 & 182 & 0 & 182 & 183 & 0 & 182 & 0 \\ 182 & 0 & 182 & 0 & 0 & 183 & 0 & 182 \\ 0 & 182 & 0 & 182 & 182 & 0 & 183 & 0 \\ 182 & 0 & 182 & 0 & 0 & 182 & 0 & 183 \end{pmatrix}$$

$$M^7 = \begin{pmatrix} 0 & 547 & 0 & 547 & 547 & 0 & 546 & 0 \\ 547 & 0 & 547 & 0 & 0 & 547 & 0 & 546 \\ 0 & 547 & 0 & 547 & 546 & 0 & 547 & 0 \\ 547 & 0 & 547 & 0 & 0 & 546 & 0 & 547 \\ 547 & 0 & 546 & 0 & 0 & 547 & 0 & 547 \\ 0 & 547 & 0 & 546 & 547 & 0 & 547 & 0 \\ 546 & 0 & 547 & 0 & 0 & 547 & 0 & 547 \\ 0 & 546 & 0 & 547 & 547 & 0 & 547 & 0 \end{pmatrix} \quad M^8 = \begin{pmatrix} 1641 & 0 & 1640 & 0 & 0 & 1640 & 0 & 1640 \\ 0 & 1641 & 0 & 1640 & 1640 & 0 & 1640 & 0 \\ 1640 & 0 & 1641 & 0 & 0 & 1640 & 0 & 1640 \\ 0 & 1640 & 0 & 1641 & 1640 & 0 & 1640 & 0 \\ 0 & 1640 & 0 & 1640 & 1641 & 0 & 1640 & 0 \\ 1640 & 0 & 1640 & 0 & 0 & 1641 & 0 & 1640 \\ 0 & 1640 & 0 & 1640 & 1640 & 0 & 1641 & 0 \\ 1640 & 0 & 1640 & 0 & 0 & 1640 & 0 & 1641 \end{pmatrix}$$

Problème 2

Partie 1

On considère une suite de 6 lancers d'une pièce équilibrée, c'est à dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de "Pile" et de "Face" sont équiprobables. Les différents lancers étant indépendants les uns des autres.

Pour tout n compris entre 1 et 6 on désigne par F_n l'événement : « Face apparaît au lancer de rang n »

Deux joueurs A et B s'affrontent dans le jeu dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A est gagnant si la configuration "Pile, Pile, Face" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "Face, Pile, Pile" n'apparaisse ;
- le joueur B est gagnant si la configuration "Face, Pile, Pile" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "Pile, Pile, Face" n'apparaisse.

Notations : A l'événement : « Le joueur A gagne »,

B l'événement : « Le joueur B gagne »,

D l'événement : « aucun des deux joueurs ne gagne »

et pour k entre 1 et 6, A_k l'événement : « le joueur A gagne au k ième lancer »,

et pour k entre 0 et 6, C_k l'événement : « on obtient k fois "Pile" au cours des 6 lancers ».

- 1) a) i. Justifier que pour tout k entre 3 et 6, $A_k = \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k$
 ii. Calculer pour tout k entre 1 et 6, la probabilité $P(A_k)$.
 iii. En déduire que $P(A) = \frac{15}{64}$.
- b) i. Peut-on observer deux "Pile" consécutifs si D est réalisé ?
 ii. Calculer pour chaque k entre 0 et 6 la probabilité de $D \cap C_k$.
Remarque : ici on n'attend pas une expression en fonction de k , mais un tableau de valeurs.
 iii. En déduire que la probabilité qu'aucun des deux joueurs ne gagne vaut $\frac{11}{32}$.
- c) Lequel des deux joueurs a la plus grande probabilité de gagner ?
- 2) On observe le premier lancer et la pièce donne "Pile".
 a) Calculer alors la probabilité de A .
 b) Lequel des deux joueurs a, alors, la plus grande probabilité de gagner ?
- 3) On observe les deux premiers lancers et la pièce donne deux fois "Pile".
 a) Calculer alors la probabilité de A .
 b) Lequel des deux joueurs a, alors, la plus grande probabilité de gagner ?

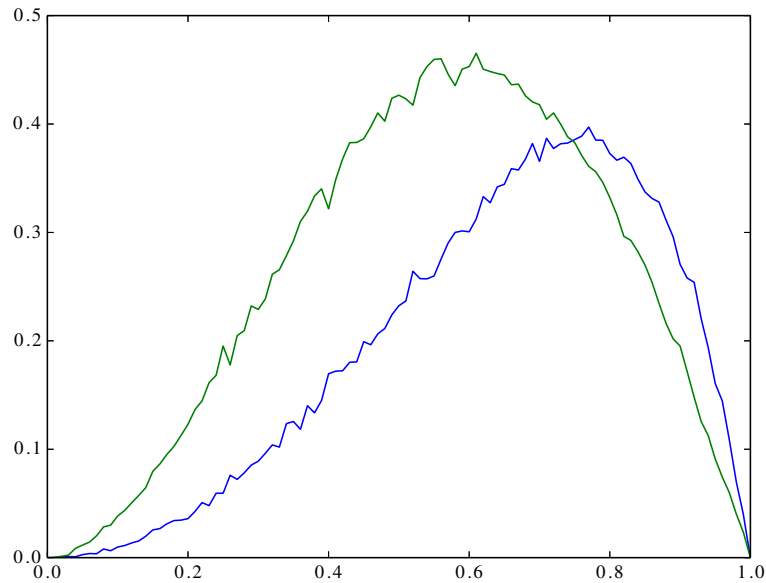
Partie 2

On veut maintenant chercher à truquer la pièce pour équilibrer le jeu, c'est-à-dire faire en sorte que les événements A et B aient la même probabilité.

Le jeu et les notations sont les mêmes que dans la **Partie 1**, seule la pièce est différente.

On note p ($p \in [0, 1]$) la probabilité d'obtenir pile.

Le programme donné en annexe permet d'étudier la situation. Il donne les courbes ci-dessous.



1) Quelques questions sur le programme.

- Que fait la fonction `piece` ?
- Quelle sont les valeurs retournées par la fonction `jeu` ? que représentent-elles ?
- Que représentent les valeurs des listes `x`, `y` et `z` ?
- Recopier l'allure des deux courbes et indiquer à quoi elles correspondent.

(vous justifierez votre réponses)

2) A la lecture de ces graphiques faites des conjectures sur les valeurs suivantes :

- La valeur de p pour laquelle $P(A)$ est maximale, celle pour laquelle $P(B)$ est maximale.
- Le maximum de $P(A)$ et celui de $P(B)$.
- La valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

3) Démontrons ces conjectures.

- i. Montrer que $P(A) = p^2(1 - p^4)$.

Indication : Reprendre la démarche de la question 1)a) de la partie 1.

- Etudier la fonction $f : x \mapsto x^2(1 - x^4)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
- Déterminer la valeur de p pour laquelle $P(A)$ est maximale, et donner ce maximum.
- Donner l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

- i. En utilisant les événements C_k , déterminer la probabilité de $P(D)$ en fonction de p .

Indication : Reprendre la démarche de la question 1)b) de la partie 1.

- En déduire que : $P(B) = p^2(1 - p^2)(p - 2)^2$
- Etudier la fonction $g : x \mapsto x^2(1 - x^2)(x - 2)^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
on pourra admettre que $g'(x)$ s'annule une unique fois sur $]0, 1[$.
- Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la valeur de p pour laquelle $P(B)$ est maximale.
- Donner l'allure de la courbe représentative de g sur l'intervalle $[0, 1]$.

- Déterminer la valeur de p pour laquelle $P(A) = P(B)$.

```

# -----Modules-----

from random import random
from matplotlib.pyplot import plot

# ----- Fonctions-----

def piece(p):
    a = random()
    if a <= p:
        return 1
    else:
        return 0

def jeu(p):
    a = piece(p)
    b = piece(p)
    c = piece(p)
    n = 3
    while (a!=0 or b!=1 or c!=1) and (a!=1 or b!=1 or c!=0) and (n!=6):
        n = n+1
        a = b
        b = c
        c = piece(p)
    if a==1 and b==1 and c==0:
        return 1
    if a==0 and b==1 and c==1:
        return 2

# -----Programme principal-----

x = []
y = []
z = []
for i in range(0,101):
    p = 0.01*i
    S1 = 0
    S2 = 0
    for k in range(5000):
        t = jeu(p)
        if t == 1:
            S1 += 1
        if t == 2:
            S2 += 1
    x += [p]
    y += [S1/5000]
    z += [S2/5000]

# ----- Représentations graphiques-----

clf()
plot(x,y)
plot(x,z)
show()

```