Correction de la feuille_Act_9

Ex 1 : 1) Dénombrer l'ensemble des codons revient à dénombrer les listes de 3 éléments de $\{A, C, G, T\}$

$$\boxed{\text{On peut construire } 4^3 = 64 \text{ codons différents.}}$$

On peut aussi refaire le raisonnement : Pour le premier nucléotide on a 4 choix possibles, puis une fois ce choix fait, on a encore 4 choix pour le deuxième et 4 pour le troisième.

$$\boxed{\text{On peut construire } 4^3 = 64 \text{ codons différents.}}$$

2) Ici on demande le cardinal de $[\![0; 9]\!]^4$

$$\boxed{\text{Le nombre de codes de carte bleue est égal à } 10^4 = 10\,000.}$$

On peut aussi refaire le raisonnement : Pour le premier numéro on a 10 choix possibles, puis une fois ce choix fait, on a encore 10 choix pour le deuxième et ainsi de suite.

$$\boxed{\text{Le nombre de codes de carte bleue est égal à } 10^4 = 10\,000.}$$

3) Dénombrer le nombre de podium revient à déterminer le nombre d'arrangements de 3 éléments de $[\![1; 10]\!]$.

$$\boxed{\text{Le nombre de podiums différents est égal à } 10 \times 9 \times 8 = 720.}$$

On peut aussi refaire le raisonnement : Pour le premier a 10 choix possibles, puis une fois ce choix fait, on a 9 choix pour le deuxième et 8 pour le troisième.

$$\boxed{\text{Le nombre de podiums différents est égal à } 10 \times 9 \times 8 = 720.}$$

4) C'est le nombre de résultats lors d'un tirage simultané de 5 objets dans une urne en contenant 52. C'est le nombre de parties à 5 objets d'un ensemble de cardinal 52.

$$\boxed{\text{Le nombre d'échantillons est égal à } \binom{52}{5} = 2\,598\,960}$$

Remarque : Ici il est plus difficile de refaire le raisonnement.

Pour les questions suivantes je fais juste le lien avec le cours et je donne la réponse.

5) listes, $2^8 = 256$.

6) Combinaisons, $\binom{66000000}{1000}$

7) Permutations, $9!$

8) Arrangements, $\frac{48!}{3!}$

9) Combinaisons $\binom{49}{6}$

10) Combinaisons $\binom{14}{4}$

11) Nombre de parties, 2^9.

12) Combinaisons $\binom{9}{4}$

13) a. Listes, 20^5.
   b. Arrangements, $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16$.
   c. Permutations, $20!$
   d. Combinaisons, $\binom{20}{5}$

14) La longueur de L sera : $\frac{10!}{2!\,3!\,5!}$ *(Nombre d'anagrammes)*

Ex 2 : *Plusieurs raisonnements possibles : (A chaque phrase de raisonnement visualiser l'arbre de choix associé)*

❶ Il y a 39 possibilités pour choisir le leader et une fois choisi on a $\binom{38}{4}$ possibilités pour les quatre autres élèves, le nombre de délégations est égal à : $39 \times \binom{38}{4}$

❷ Il y a $\binom{39}{5}$ possibilités pour choisir les 5 élèves et une fois choisi on a 5 possibilités pour le choix du leader, le nombre de délégations est égal à : $\binom{39}{5} \times 5$

❸ *(pas vu au tableau)* Il y a $\binom{39}{4}$ possibilités pour choisir les 4 élèves qui ne sont pas leader et une fois choisi on a 35 possibilités pour le choix du leader, le nombre de délégations est égal à : $\binom{39}{4} \times 35$

Ces trois raisonnements donnent le même résultat (heureusement !) :

$$\boxed{\text{le nombre de délégations différentes de 5 élèves avec un leader est égal à : } 2\,878\,785}$$

Ex 3 : *Avec le même raisonnement que dans l'Ex 1. on obtient le cardinal de l'ensemble A les trois expressions suivantes donne le même entier :*

❶ $n\binom{n-1}{p-1}$ ❷ $\binom{n}{p}p$ ❸ $\binom{n}{p-1}(n-p+1)$

On retrouve ici la démonstration de ce que vous appellez la formule du chef :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Ex 4 : Remarque : Le nombre de groupes de colle possible est $\binom{39}{3} = 9\,139$

(nombre de parties de la classe composées de 3 élèves)

1) Le nombre de groupes de colle avec Nokomie est $\binom{39}{2} = \dfrac{39 \times 38}{2} = 741$

(nombre de parties de 2 élèves pris dans la classe privé de Nokomie)

2) Le nombre de groupes de colle sans Nokomie est $\binom{38}{3} = 8\,436$

(nombre de parties de 3 élèves pris dans la classe privé de Nokomie)

Ex 5 : 1) *C'est une question de cours.*

$$\boxed{\text{Le nombre de parties de } E \text{ à } p \text{ éléments est égal à } \binom{n}{p}}$$

2) Pour définir une telle partie il faut et il suffit désigner les $p-1$ éléments qui sont avec a.

$$\boxed{\text{Le nombre de parties de } E \text{ à } p \text{ éléments avec } a \text{ est égal à } \binom{n-1}{p-1}}$$

3) On demande ici le nombre de parties de $E \setminus \{a\}$ à p éléments .

$$\boxed{\text{Le nombre de parties à } p \text{ éléments de } E \text{ avec } a \text{ est égal à } \binom{n}{p-1}}$$

4) En notant A l'ensemble des parties de E à p éléments et B l'ensemble des parties de E avec a.
La question 1) montre que $\text{card}(A) = \binom{n}{p}$, la question 2) montre que $\text{card}(A \cap B) = \binom{n-1}{p-1}$ et la question 3) montre que $\text{card}(A \cap \overline{B}) = \binom{n-1}{p-1}$,
Or $\quad \text{card}(A) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap \overline{B})$ donc

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{p-1} \quad \textit{(Formule du triangle de Pascal)}}$$

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : *(non corrigé)*

Ex 8 : *(non corrigé)*

Ex 9 : *(non corrigé)*

Ex 10 : *(non corrigé)*

Ex 11 : *En classe je n'ai fait que l'exemple, mais le raisonnement est le même.*
Chaque chemin peut être vu comme un anagramme du mot : $\underbrace{H \cdots H}_{p-1}\ \underbrace{D \cdots D}_{n-1}$,

il y a autant de chemins que d'anagrammes de ce mot :

$$\boxed{\text{Le nombre de chemins est égal à } \binom{n+p-2}{n-1}}$$

Sur l'exemple on avait trouvé : $\binom{11}{5} = 462$ *chemins possibles.*