

Correction feuille_Act_10 : Probabilités. Ensembles. Événements

Ex 1 : On note $n = 1000$ et pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, S_k : "obtenir un 6 au k ème lancer".

Les lancers sont indépendants donc $(S_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une liste d'événements mutuellement indépendants.

- 1) Ici on veut la probabilité de l'événement $A = \bigcap_{k=1}^n S_k$, et comme les lancers sont indépendants il vient :

La probabilité de n'obtenir que des 6 est égale à $\left(\frac{1}{6}\right)^{1000}$

Au tableau on a montré une autre approche avec le modèle probabiliste $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^n$ muni de la probabilité uniforme. $\text{card}(\Omega) = 6^n$. On a $A = \{(6, \dots, 6)\}$ donc $\text{card}(A) = 1$ et ainsi $P(A) = \frac{1}{6^n}$

- 2) On note B : "obtenir au moins un 6", on a alors : $\overline{B}$: "obtenir aucun 6" ou $\overline{B} = \bigcap_{k=1}^n \overline{S_k}$, et comme les lancers sont indépendants il vient : $P(\overline{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et ainsi $P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

La probabilité d'obtenir au moins un 6 est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$

- 3) On note C : "obtenir exactement un 6".

$$C = (S_1 \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}) \cup \dots \cup (\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n)$$

(On fait une partition de C en fonction de la place du 6)

L'événement C est la réunion de n événements 2 à 2 disjoints et tous de même probabilité $\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$$\text{donc } P(C) = n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

La probabilité d'obtenir exactement un 6 est égale à $1000 \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{999}$ ou encore $200 \left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$

Remarque : On est ici dans une situation ultra-classique : un schéma de Bernoulli.

Si on note X le nombre de 6 obtenu, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(1000, \frac{1}{6}\right)$.

$$P(C) = P(X = 1) = \binom{n}{1} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Ex 2 : On note pour $k \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$, N_k : "la dernière boule est noire".

- 1) Au premier tirage l'urne contient une boule noire sur un total de 8 boules donc

$P(N_1) = \frac{3}{8}$

- 2) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet : $(N_1, \overline{N_1})$

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(N_1)P_{N_1}(N_2) + P(\overline{N_1})P_{\overline{N_1}}(N_2) && \text{(faire l'arbre pondéré au brouillon)} \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$P(N_2) = \frac{3}{8}$

3) *Exercice classique avec un résultat surprenant la première fois.*

Modèle classique.

On numérote les boules, 1, 2, 3 représentent les boules noires, 4, 5, 6, 7, 8 les boules blanches.

L'univers Ω : l'ensemble des permutations $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. ($\text{card}(\Omega) = 8!$)

On munit Ω de la probabilité uniforme. (On calculera les probabilités avec la formule $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$)

N_8 est l'ensemble des permutations $(x_1, \dots, x_8)$ qui finissent par un 1, 2 ou 3.

le $\text{card}(N_8)$ est égal à $\underbrace{7!}_{\text{les résultats finissant par 1}} + \underbrace{7!}_{\text{les résultats finissant par 2}} + \underbrace{7!}_{\text{les résultats finissant par 3}}$

$$\text{donc } P(N_8) = \frac{\text{card}(N_8)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3 \times 7!}{8!}$$

$$\boxed{P(N_8) = \frac{3}{8}}$$

Remarque : Pour des raisons de symétrie les 8 boules ont la même probabilité d'être tirée au dernier tirage.

Les 8 boules ont la même probabilité d'apparaître en dernier, donc chacune avec une probabilité de $\frac{1}{8}$.

Imaginez-vous observer l'apparition de cette dernière boule : Il n'y a aucune raison pour qu'une boule apparaisse (en moyenne) plus souvent qu'une autre.

Un autre modèle.

On choisit ici le modèle :

L'univers Ω : l'ensemble des anagrammes du mot NNNBBBBB. ($\text{card}(\Omega) = \binom{8}{3}$)

On munit Ω de la probabilité uniforme. (On calculera les probabilités avec la formule $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$)

On note N_8 : "la dernière boule est noire".

N_8 est l'ensemble des anagrammes qui finissent par un N.

le $\text{card}(N_8)$ est égal au nombre d'anagrammes du mot NNBBBBB donc $\text{card}(N_8) = \binom{7}{2}$

$$\text{donc } P(N_8) = \frac{\text{card}(N_8)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{\binom{7}{2}}{\frac{8}{3} \binom{7}{2}}$$

$$\boxed{P(N_8) = \frac{3}{8}}$$

Ex 3 : (non corrigé)

Ex 4 : (non corrigé)

Ex 5 : (non corrigé)

Ex 6 : A chaque question l'expérience change, nous devons redéfinir des événements adaptés à la situation.

1) On note : C : " Le dé tiré est classique", S : " On obtient un six" .

La formule des probabilités totales avec le système complet $\{C; \overline{C}\}$ donne

$$\begin{aligned} P(S) &= P(C)P_C(S) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(S) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir un six est égale à } \frac{17}{60}}$$

2) On note : C : " Le dé tiré est classique",

S_1 : " On obtient un six au premier lancer" et S_2 : " On obtient un six au deuxième lancer".

La formule des probabilités totales avec le système complet $\{C; \overline{C}\}$ donne

$$P(S_1 \cap S_2) = P(C)P_C(S_1 \cap S_2) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(S_1 \cap S_2)$$

et comme une fois les dés choisis les lancers sont indépendants :

$$P(S_1 \cap S_2) = P(C)P_C(S_1)P_C(S_2) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(S_1)P_{\overline{C}}(S_2)$$

ce qui donne :

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

la probabilité d'obtenir un double-six est égale à $\frac{31}{360}$

Remarque faite au tableau :

- Les événements S_1 et S_2 sont indépendants pour les probabilités conditionnelles P_C et $P_{\overline{C}}$.
- En revanche S_1 et S_2 ne sont pas indépendants pour la probabilité P .

- 3) On note : A : "les deux dés ne sont pas classiques", B : "les deux dés sont différents", C : "les deux dés tirés sont classiques" et S : "on obtient un double-six".

La formule des probabilités totales avec le système complet $\{A, B, C\}$ donne

$$P(S) = P(A)P_A(S) + P(B)P_B(S) + P(C)P_C(S)$$

Le tirage des deux dés est la situation classique du tirage simultané de deux objets dans une urne de 10 dés, on obtient :

$$P(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15} \quad P(B) = \frac{3 \times 7}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15} \quad P(C) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$$

- Si A est réalisée l'expérience consiste au lancer de deux dés non classiques donc

$$P_A(S) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- Si B est réalisée l'expérience consiste au lancer d'un dé non classique et un dé classique donc

$$P_B(S) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

- Si C est réalisée l'expérience consiste au lancer de deux dés classiques donc

$$P_C(S) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

il vient :

$$P(S) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{9} + \frac{7}{15} \times \frac{1}{18} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{36}$$

la probabilité d'obtenir un double-six vaut : $\frac{43}{540}$

- 4) On note : S_k : " On obtient un six avec le dé numéro k " (*les trois premiers sont classiques*)
 Les lancers sont indépendants donc :

$$P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{10}) = P(S_1)P(S_2) \dots P(S_{10})$$

la probabilité de n'obtenir que des six vaut : $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{472392}$

Ex 7 : (*non corrigé*)

Ex 8 : (*non corrigé*)

Modèles classiques.

- 1) **Modèle** : On prend pour univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 6$)
 On note A : "obtenir un multiple de 3" , autrement dit $A = \{3, 6\}$ et $\text{card}(A) = 2$
 La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6}$

la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est égale à : $\frac{1}{3}$

- 2) **Modèle** : On prend pour univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 36$)
 On note A : "obtenir au moins un 6" , on a alors $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ et $\text{card}(\bar{A}) = 25$
 La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\text{card}(\bar{A})}{\text{card}(\Omega)}$

la probabilité d'obtenir au moins un 6 est égale à : $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

- 3) **Modèle** : On prend pour univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 6^4$)
 On note A : "la somme des numéros obtenus soit égale à 5" ,
 autrement dit $A = \{(1, 1, 1, 2), \dots, (2, 1, 1, 1)\}$ et $\text{card}(A) = 4$
 La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6^4}$

la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 5 vaut : $\frac{1}{324}$

- 4) **Modèle** : On prend pour univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 6^n$)
 On note A : "Tous les dés donnent le même résultat" ,
 autrement dit $A = \{(1, \dots, 1), \dots, (6, \dots, 6)\}$ et $\text{card}(A) = 6$
 La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6^{n-1}}$

la probabilité que tous les dés donnent le même résultat est égale à : $\frac{1}{6^{n-1}}$

- 5) **Modèle** : On prend pour univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 6^3$)
 On note A : "on obtient "421" ,
 autrement dit A est l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 4\}$ et $\text{card}(A) = 3! = 6$
 La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{6^3}$

la probabilité que tous les dés donnent le même résultat est égale à b : $\frac{1}{36}$

- 6) **Modèle** : On prend pour univers : $\Omega = \{0, 1\}^4$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 2^4 = 16$)
 $X_1 = X_2$ est l'événement : "obtenir autant de piles que de faces" ,
 autrement dit $(X_1 = X_2) = \{(1, 1, 0, 0), \dots, (0, 0, 1, 1)\}$ et $\text{card}(X_1 = X_2) = 6$
 La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{\text{card}(X_1 = X_2)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{6}{16}$

$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{3}{8}$

- 7) **Modèle** : On prend pour univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, muni de $\mathbb{P}$: uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 10$)
 On note A : "obtenir un nombre premier" , autrement dit $A = \{2, 3, 5, 7\}$ et $\text{card}(A) = 4$
 La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{10}$

la probabilité d'obtenir un nombre premier est égale à : $\frac{2}{5}$

- 8) **Modèle :** On prend pour univers : Ω l'ensemble des combinaisons de deux éléments de $\llbracket 1; 100 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = \binom{100}{2}$)

On note A : "obtenir deux nombres consécutifs" , autrement dit $A = \{\{1, 2\}, \dots, \{99, 100\}\}$ et $\text{card}(A) = 99$

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{99}{\binom{100}{2}}$

la probabilité d'obtenir deux nombres consécutifs est égale à : $\frac{1}{50}$

- 9) On a nécessairement : $1 \leq p \leq 100$, (on suppose donc p est entre 1 et 100).

Modèle : On prend pour univers : Ω l'ensemble des combinaisons de p éléments de $\llbracket 1; 100 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = \binom{100}{p}$)

On note A : "obtenir p nombres consécutifs" , autrement dit $A = \{\{1, 2, \dots, p\}, \dots, \{100 - p + 1, \dots, 100\}\}$ et $\text{card}(A) = 100 - p + 1$

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{101 - p}{\binom{100}{p}}$

la probabilité d'obtenir p nombres consécutifs est égale à : $\frac{101 - p}{\binom{100}{p}}$

- 10) (Attention j'ai modifié l'énoncé, j'ai enlevé "consécutifs")

Modèle : On prend pour univers : Ω l'ensemble des arrangements de deux éléments de $\llbracket 1; 100 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 100 \times 99$)

On note A : "obtenir deux nombres dans l'ordre croissant" , (nécessairement strictement croissant)

autrement dit $A = \{(1, 2), \dots, (99, 100)\}$ et $\text{card}(A) = \binom{100}{2}$.

(Autant de listes strictement croissantes que de parties)

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{100}{2}}{100 \times 99}$

la probabilité d'obtenir deux nombres dans l'ordre croissant est égale à : $\frac{1}{2}$

- 11) **Modèle :** On prend pour univers : Ω l'ensemble des listes de p éléments de $\llbracket 1; 100 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 100^p$)

On note A : "obtenir p nombres consécutifs dans l'ordre croissant" ,

autrement dit : $A = \{(1, 2, \dots, p), \dots, (100 - p + 1, \dots, 100)\}$ et $\text{card}(A) = 101 - p$.

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{101 - p}{100^p}$

la probabilité d'obtenir p nombres consécutifs dans l'ordre croissant est égale à : $\frac{101 - p}{100^p}$

- 12) **Modèle :** On prend pour univers : $\Omega = \{1; 2; 3\}$ (1 : rouge , 2 : verte et 3 : noire).

Et on munit cet univers de la probabilité définie par :

ω	1	2	3
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

la probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à : $\frac{1}{3}$

- 13) **Modèle :** On prend pour univers : Ω l'ensemble des combinaisons de trois éléments de $\llbracket 1; 10 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = \binom{10}{3}$)

On note A : "obtenir trois nombres consécutifs" ,

autrement dit $A = \{\{1, 2, 3\}, \dots, \{8, 9, 10\}\}$ et $\text{card}(A) = 8$

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{\binom{10}{3}}$

la probabilité d'obtenir trois nombres consécutifs est égale à : $\frac{1}{15}$

- 14) **Modèle :** On prend pour univers : Ω l'ensemble des arrangements de trois éléments de $\llbracket 1; 10 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 10 \times 9 \times 8$)

On note $A = (X_1 = 1) \cup (X_{10} = 10)$,

autrement dit $A = \{(1, 2, 10), \dots, (1, 9, 10)\}$ et $\text{card}(A) = 8$

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{10 \times 9 \times 8}$

$$P((X_1 = 1) \cup (X_{10} = 10)) = \frac{1}{90}$$

- 15) **Modèle :** On prend pour univers : Ω l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; 10 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 10!$)

On note A : "obtenir les nombres dans l'ordre croissant" ,

autrement dit $A = \{(1, 2, \dots, 10)\}$ et $\text{card}(A) = 1$

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

la probabilité d'obtenir les nombres dans l'ordre croissant est égale à : $\frac{1}{10!}$

- 16) **Modèle :** On prend pour univers : Ω l'ensemble des listes de trois éléments de $\llbracket 1; 10 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 10^3$)

On note A : "la première valeur est 1 et la dernière 10" ,

autrement dit $A = \{(1, 1, 10), \dots, (1, 10, 10)\}$ et $\text{card}(A) = 10$

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{10}{10^3}$

la probabilité que la première valeur soit 1 et la dernière 10, est égale à : $\frac{1}{100}$

- 17) **Modèle :** On prend pour univers : Ω l'ensemble des anagrammes du mot "RRVVVVVVVV", muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = \binom{10}{2}$)

On note A : "On obtient les deux boules rouges consécutivement" ,

autrement dit $A = \{ \text{"RRVVVVVVVV"} , \dots , \text{"VVVVVVVVRR"} \}$ et $\text{card}(A) = 9$

La probabilité est uniforme donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{\binom{10}{2}}$

la probabilité que la première valeur soit 1 et la dernière 10, est égale à : $\frac{1}{5}$

18)

19)

20)