Feuille_Cours_4 : Probabilité sur un univers quelconque.

**Ex 1 :** Soit $(A_n)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un univers $\Omega$ et $N$ un entier naturel fixé.
Classer *(du plus petit au plus grand au sens de l'inclusion)* les cinq événements suivants :

$$A_N \qquad \bigcup_{n=0}^{N} A_n \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \qquad \bigcap_{n=0}^{N} A_n \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$$

**Ex 2 :** Donner des exemples de systèmes complets d'événements dans les cas suivants :

$$\Omega_1 = [\![1;6]\!] \qquad \Omega_2 = [0;1] \qquad \Omega_3 = \mathbb{R} \qquad \Omega_4 = \mathbb{R}^2 \qquad \Omega_5 = [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}}$$

**Ex 3 :** Soient $A$ et $B$ deux événements d'un même espace probabilisable $\big(\Omega, \mathscr{T}\big)$.
Justifier que les trois événements $A$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un système complet d'événements.

**Ex 4 :** On lance indéfiniment un dé, et on note : $S_k$ : "le $k$-ème lancer donne ❻ " $C_k$ : "le $k$-ème lancer donne ❺ ".
Ecrire, à l'aide des événements $S_k$ et $C_k$, les événements suivants.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n$ : " Le ❻ n'est pas apparu au cours des $n$ premiers lancers ".
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n$ : " Le ❻ est apparu une et une seule fois au cours des $n$ premiers lancers ".
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n$ : " Le ❻ est apparu exactement deux fois au cours des $n$ premiers lancers ".
4) $E_1$ : " Le ❻ n'apparait jamais "
5) $E_2$ : " On obtient au moins une fois ❻ "
6) $E_3$ : " On obtient au moins une fois ❺ et au moins une fois ❻ ".
7) $E_4$ : " On obtient que des ❻ ".
8) $E_5$ : " On obtient un nombre fini de ❻ ".
9) $E_6$ : " A partir d'un certain tirage on obtient que des ❻ ".

**Ex 5 :** On considère une expérience aléatoire consistant à tirer indéfiniment des réels $X_1, X_2, \ldots$ dans $\mathbb{R}^+$.
On définit les événements simples suivants :

$$A_k = \{X_k \in [0,1]\}, \quad B_k = \{X_k \in ]1,2]\}, \quad C_k = \{X_k > 2\}.$$

Ecrire en fonction des $A_k, B_k$ et $C_k$ les événements suivants :

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1(n)$ : "les $n$ premiers tirages sont tous dans [0,1]".
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_2(n)$ : "exactement un des $n$ premiers tirages est dans [0,2]".
3) $E_3$ : "tous les tirages sont strictement supérieurs à 2".
4) $E_4$ : "au moins un tirage est dans [0,1]".
5) $E_5$ : "à partir d'un certain rang, tous les tirages sont dans (1,2]".
6) $E_6$ : "il y a un nombre fini de tirages dans [0,1]".]
7) $E_7$ : "il y a un nombre infini de tirages strictement supérieurs à 2".

**Ex 6 :** 1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements vérifiant : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 0$ ,

Montrer que : $P\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0.$

2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements vérifiant : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 1$ ,

Montrer que : $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1.$

3) **Application :** On lance indéfiniment un dé. Quelle est la probabilité de n'avoir jamais la face ❻ ?

**Ex 7 :** *(Avec la définition d'une probabilité sur un univers fini)*

1) Démontrer que :

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors la série $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$ converge.

2) En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

**Ex 8 :** 1) On lance indéfiniment une pièce équilibrée et on note $X$ le rang d'apparition du premier pile.
Quelle est la probabilité que $X$ soit un nombre pair ?
*Indication : C'est une situation classique modélisée par la donnée de la suite $(F_n)$ définie par :*

*pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n$ : "le nième lancer donne Face".*

*Les événements de $(F_n)$ sont mutuellement indépendants.*

2) Reprendre la question précédente avec une pièce truquée donnant pile avec une probabilité $p \in ]0, 1[$.

**Ex 9 :** Deux joueurs lancent tour à tour un dé. Le premier qui tire un six a gagné et le jeu s'arrête.
Quelle est la probabilité de gagner pour chacun des joueurs ? Que personne ne gagne ?
*Indication : On se ramène à la situation classique modélisée par la donnée de la suite $(S_n)$ définie par :*

*pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ : "le nième lancer donne un six".*

*On fait comme si le jeu ne s'arrêtait pas pour avoir la propriété :*
*Les événements de $(S_n)$ sont mutuellement indépendants.*

**Ex 10 :** 1) Soit $A$ un événement tel que $P(A) = 0$ :

montrer que pour tout événement $B$, $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cup B) = P(B)$

2) Soit $A$ un événement tel que $P(A) = 1$ :

montrer que pour tout événement $B$, $P(A \cap B) = P(B)$ et $P(A \cup B) = 1$.