Correction de l'interrogation 5 (25 minutes)

1) a) Modèle : $\boxed{\text{Univers : } \Omega = [\![1;6]\!]^3,\ \mathbb{P} \text{ : uniforme}}$ et $\boxed{\text{card}(\Omega) = 6^3 = 216}$

b) $A = \{(6,6,6)\}$ donc $\text{card}(A) = 1$ et ainsi $\boxed{P(A) = \dfrac{1}{216}}$

c) Pour obtenir un élément de B, on a $\binom{3}{2}$ choix possibles pour la place des deux 6, puis 5 choix pour le dernier nombre entre 1 et 5 donc $\text{card}(B) = 5\binom{3}{2}$ et ainsi $\boxed{P(B) = \dfrac{5 \times 3}{6^3} = \dfrac{5}{72}}$

d) En note C : "obtenir au moins 2 ❻ " , on a : $C = A \cup B$ avec $A \cap B = \varnothing$ donc

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{216} + \frac{15}{216}$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir au moins deux ❻ est égale à } \frac{2}{27}}$$

2) a) Au premier tirage l'urne contient 3 boules rouges sur un total de 9 boules donc $\boxed{P(R_1) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}}$

b) • Si R_1 est réalisé, au deuxième tirage l'urne contient 2 boules rouges sur un total de 8 boules donc

$$\boxed{P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}}$$

• Si $\overline{R_1}$ est réalisé, au deuxième tirage l'urne contient 3 boules rouges sur un total de 8 boules donc

$$\boxed{P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{3}{8}}$$

c) R_1 et $\overline{R_1}$ forment un système complet donc en appliquant la formule des probablités totales :

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{8}{3 \times 8} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(R_2) = \frac{1}{3}}$$

3) *(Voir le cours)*

4) a) Le nombre de listes de 3 éléments de $\{0,1\}$ est égal à : $2^3 = 8$.

b) $\{0,1\}^3 = \Big\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\Big\}$

c) Le nombre de combinaisons de 3 éléments de $\{1,2,3,4,5\}$ est égal à : $\binom{5}{3} = 10$

d) L'ensemble les combinaisons de 3 éléments de $\{1,2,3,4,5\}$ est égal à :

$$\Big\{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}\Big\}$$

5) *(Voir le cours)*

6) a) Modèle : Ω : l'ensemble des arrangements de 4 éléments de $[\![1,10]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

$(\text{card}(\Omega) = 10 \times 9 \times 8 \times 7)$

b) ❶ a 7 places possibles donc $\text{card}(A) = 7$ et ainsi $\boxed{P(A) = \dfrac{7}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \dfrac{1}{720}}$

c) B est l'ensemble des listes strictement croissantes de 4 éléments de $[\![1,10]\!]$ donc $\text{card}(B) = \binom{10}{4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}}$$

7) a) *Voir ci-dessous.*

b) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet : $(B\cap I, B\cap \overline{I}, O\cap I, O\cap \overline{I}, C\cap I, C\cap \overline{I})$ on obtient :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(B\cap I\cap T)+P(B\cap \overline{I}\cap T)+P(O\cap I\cap T)+P(O\cap \overline{I}\cap T)+P(C\cap I\cap T)+P(C\cap \overline{I}\cap T) \\ &= 0{,}5\times 0{,}12\times 0{,}9+\cdots \qquad \textit{(Formule des probabilités composées)} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T)=0{,}13468}$$

c) Ici on nous demande $P_T(I)=\dfrac{P(T\cap I)}{P(T)}$, il reste à calculer $P(T\cap I)$.

En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet : (B, O, C) on obtient :

$$\begin{aligned} P(T\cap I) &= P(B\cap I\cap T)+P(O\cap I\cap T)+P(C\cap I\cap T) \\ &= 0{,}5\times 0{,}12\times 0{,}9+0{,}3\times 0{,}08\times 0{,}8+0{,}2\times 0{,}15\times 0{,}7 \\ &= 0{,}0942 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_T(I)\approx 0{,}7}$$