Correction de la feuille_Cours_4 : Probabilité sur un univers quelconque.

Ex 1 :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcap_{n=0}^{N} A_n \subset A_N \subset \bigcup_{n=0}^{N} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$

Description des quatre inclusions :
Si ω est dans tous les A_n ($n \in \mathbb{N}$) alors il est dans les A_n ($0 \leqslant n \leqslant N$).
Si ω est dans les A_n ($0 \leqslant n \leqslant N$) alors il est dans A_N.
Si ω est dans A_N alors il est dans au moins un des A_n ($0 \leqslant n \leqslant N$)
Si ω est dans au moins un des A_n ($0 \leqslant n \leqslant N$) alors il est dans au moins un des A_n ($n \in \mathbb{N}$)

Ex 2 : *(non corrigé)*

Ex 3 : • D'une part : $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup (\overline{A} \cup \Omega) = A \cup \overline{A} = \Omega$

• D'autre part : $A \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$, $A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing$ et $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$

donc $\boxed{A,\ \overline{A} \cap B \text{ et } \overline{A} \cap \overline{B} \text{ forment un système complet d'événements.}}$

Ex 4 : 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{S_k}$. $\left(\forall \omega \in \Omega, \quad (\omega \in A_n \iff \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \omega \in \overline{S_k}) \right)$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{S_i} \right) \cap S_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{S_i} \right) \right)$.

Remarque : $\boxed{\textit{Lorsque } p > n \quad \textit{alors} \quad \bigcap_{i=p}^{n} A_i = \Omega \quad \textit{et} \quad \bigcup_{i=p}^{n} A_i = \varnothing}$

3) $E_1 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{S_k}$. $\left(\forall \omega \in \Omega, \quad (\omega \in E_1 \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \omega \in \overline{S_k}) \right)$

4) $E_2 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k$. (Remarque : $E_2 = \overline{E_1}$) $\left(\forall \omega \in \Omega, \quad (\omega \in E_2 \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, \quad \omega \in S_k) \right)$

5) $E_3 = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k \right)$ (E_3 est réalisé si, et seulement si, au moins un C_k est réalisé et au moins un S_k est réalisé)

6) $E_4 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} S_k$.

7) $E_5 = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=N}^{+\infty} \overline{S_k} \right)$. $\left(\forall \omega \in \Omega, \quad (\omega \in E_5 \iff \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant N, \quad \omega \in \overline{S_k}) \right)$

8) $E_6 = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=N}^{+\infty} S_k \right)$. $\left(\forall \omega \in \Omega, \quad (\omega \in E_5 \iff \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant N, \quad \omega \in S_k) \right)$

Ex 5 : *(non corrigé)*

Ex 6 : 1) *(correction dans le cours)*

2) *(correction dans le cours)*

3) **Application.**

On note pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, S_k : "on obtient un ❻ au $k^{\text{ième}}$ lancer".

On remarque que : $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{S_k}$: "ne pas obtenir de ❻ au cours des n premiers lancers".

$\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{S_k}$: "ne jamais obtenir de ❻ ".

Les lancers sont indépendants donc $P(\overline{S}_k) = \dfrac{5}{6}$, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{S_k} \right) = \left(\dfrac{5}{6} \right)^n$ et $\lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{S_k} \right) = 0$

donc *(en appliquant ce qui a été montré en 1))* $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{S_k} \right) = 0$.

Il est quasi-impossible de ne jamais avoir de ❻

Ex 7 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$,

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_{n+1} - S_n = P(A_{n+1}) \geqslant 0$, $\quad$ donc (S_n) est croissante.

Les A_n sont deux à deux incompatibles donc $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$

donc (S_n) est majorée par 1

En conclusion : (S_n) est convergente, ou encore :

$$\boxed{\text{si les } (A_n) \text{ sont deux à deux incompatibles alors la série } \sum_{n\geqslant 1} P(A_n) \text{ est convergente.}}$$

2) Le terme général d'une série convergente tend vers 0 donc

$$\boxed{\text{si les } (A_n) \text{ sont deux à deux incompatibles alors } \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0}$$

Ex 8 : 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad$ on note F_n : "le $n$ième lancer donne Face".

L'événement "X est pair" (noté A) est égal à : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = 2n)$

or les $(X = 2n)$ sont 2 à 2 incompatibles donc $P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n)$

De plus, $(X = 2n) = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{2n-1} \cap \overline{F_{2n}}$ et les (F_k) sont mutuellement indépendants donc

$$P(X = 2n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

donc $\quad P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\text{La probabilité que } X \text{ soit un nombre pair est égale à } \frac{1}{3}}$$

2) *(Question non traitée en classe)* $\quad$ *La pièce est truquée donnant pile avec une probabilité* $p \in]0,1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad$ on note F_n : "le $n$ième lancer donne Face".

L'événement "X est pair" (noté A) est égal à : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = 2n)$

or les $(X = 2n)$ sont 2 à 2 incompatibles donc $P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n)$

De plus, $(X = 2n) = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{2n-1} \cap \overline{F_{2n}}$ et les (F_k) sont mutuellement indépendants donc

$$P(X = 2n) = (1-p)^{2n-1}\, p$$

donc $\quad P(A) = p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^n = p(1-p)\,\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$

$$\boxed{\text{La probabilité que } X \text{ soit un nombre pair est égale à } \frac{1-p}{2-p}}$$

Ex 9 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad$ on note S_n : "le $n$ième lancer donne un ❻ " $\quad$ et X le rang du premier ❻ .

L'événement "Le premier joueur gagne" (noté A) est égal à : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = 2n-1)$

or les $(X = 2n-1)$ sont 2 à 2 incompatibles donc $P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n-1)$

De plus, $(X = 2n-1) = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap ... \cap \overline{S_{2n-2}} \cap S_{2n-1}$ et les (S_k) sont mutuellement indépendants donc

$$P(X = 2n-1) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2n-2} \frac{1}{6} \ = \ \frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$$

donc $\quad P(A) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{1-\frac{25}{36}} = \dfrac{6}{11}$

$$\boxed{\text{La probabilité que le premier joueur gagne est égale à } \frac{6}{11}}$$

L'événement "Le deuxième joueur gagne" (noté B) est égal à : $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}(X = 2n)$

or les $(X = 2n)$ sont 2 à 2 incompatibles donc $P(B) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n)$

De plus, $(X = 2n) = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap ... \cap \overline{S_{2n-1}} \cap S_{2n}$ et les (S_k) sont mutuellement indépendants donc

$$P(X = 2n) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2n-1} \frac{1}{6} \ = \ \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$$

donc $\quad P(A) = \dfrac{5}{36}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} = \dfrac{5}{36} \times \dfrac{1}{1-\frac{25}{36}} = \dfrac{5}{11}$

$$\boxed{\text{La probabilité que le deuxième joueur gagne est égale à } \frac{5}{11}}$$

Si on note C l'événement "personne ne gagne", (A, B, C) est un système complet d'événement donc

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 0$$

$$\boxed{\text{Il est quasi-impossible que personne ne gagne.}}$$

Ex 10 : *(Démonstration faite dans le cours).*