Correction de la feuille Exo_4 : Matrices inversibles. Rang.

Ex 1. Des matrices lignes ou des matrices colonnes non nulles donc :

$$\mathrm{rg}(L_1) = 1 \qquad \mathrm{rg}(L_2) = 1 \qquad \mathrm{rg}(C_1) = 1 \qquad \mathrm{rg}(C_2) = 1$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A_1) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A_2) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Juste les réponses. pour les matrices A_3, ... , A_9.

$$\mathrm{rg}(A_3) = 3 \qquad \mathrm{rg}(A_4) = 2 \qquad \mathrm{rg}(A_5) = 4 \qquad \mathrm{rg}(A_6) = 4$$

$$\begin{aligned}
A_{10}X = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 & 0 \\ 14 & 18 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 13 & 13 \\ 3 & 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 13x + 12y = 0 \\ 14x + 18y = 0 \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 13z + 13t = 0 \\ 3x + 3y + 12z + 15t = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \textit{(le déterminant de ce système } 2\times 2 \textit{ est non nul)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 13z + 13t = 0 \\ 3x + 3y + 12z + 15t = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ \left\{ \begin{array}{l} 13z + 13t = 0 \\ 12z + 15t = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \textit{(le déterminant de ce système } 2\times 2 \textit{ est non nul)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ (z,t) = (0,0) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

La matrice A_{10} est donc inversible *(A est inversible ssi $AX = 0$ est de Cramer)* et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A_{10}) = 4}$$

Juste la réponse. pour la matrice A_{11}

$$\mathrm{rg}(A_{11}) = 3$$

$$A_{12}X = 0 \iff \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 & 0 \\ 14 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 13x + 12y = 0 \\ 14x + 18y = 0 \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} 13z + 13t = 0 \\ 12z + 15t = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \textit{(les déterminants de ces systèmes } 2 \times 2 \textit{ sont non nuls)}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (x, y) = (0, 0) \\ (z, t) = (0, 0) \end{array} \right.$$

La matrice A_{12} est donc inversible *(A est inversible ssi $AX = 0$ est de Cramer)* et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A_{12}) = 4}$$

Ex 2. • Si $e_1 \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ alors :

$$MX = 0 \iff \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{r} e_1x + e_2y + e_3z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \qquad \textit{car } ad - bc \neq 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \qquad \textit{car } e_1 \neq 0$$

$MX = 0$ est de Cramer donc M est inversible.

• Si $e_1 = 0$ alors : la première colonne de M est nulle donc

M n'est pas inversible.

• Si $ad - bc = 0$ alors : le système $\left\{ \begin{array}{l} ay + bz = 0 \\ cy + dz = 0 \end{array} \right.$ possède au moins une solution $(y_1, z_1) \neq (0, 0)$

Donc $(0, y_1, z_1)$ est une solution différente de $(0, 0, 0)$ de $MX = 0$ donc $MX = 0$ n'est pas de Cramer.

M n'est pas inversible.

En conclusion, on a bien l'équivalence :

$$\boxed{M \text{ est inversible si, et seulement si, } e_1 \neq 0 \text{ et } ad - bc \neq 0}$$

Ex 3. *(non corrigé) Mais le raisonnement est très proche de celui utilisé à la question précédente.*

Ex 4. 1) On suppose que $u_n \notin \mathrm{vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1})$:

On note r le rang de $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1})$,
on a alors $u_n \notin \mathrm{vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre donc

$(e_1, \ldots, e_r, u_n)$ est une famille libre.

donc $\mathrm{rg}\,(e_1, \ldots, e_r, u_n) = r + 1$ et comme $\mathrm{vect}\,(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{vect}\,(e_1, \ldots, e_r, u_n)$

$$\mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n) = r + 1$$

on a bien montré :

$$\boxed{\text{si } u_n \notin \mathrm{vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1}) \text{ alors } \mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_{n-1}) + 1}$$

2)

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= 1 + \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} && \textit{(d'après 1) car } C_1 \notin \mathrm{vect}(C_2, ..., C_n) \textit{)} \\ &= 1 + \mathrm{rg}(B) && \textit{en raisonnant sur les lignes} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) + 1}$$

Ex 5. *(non corrigé)*

Ex 6. *(non corrigé)*

Ex 7. *(non corrigé)*

Ex 8. *(non corrigé)*

Ex 9. *(non corrigé)*

Ex 10. *(non corrigé)*

Ex 11. *(non corrigé)*