Feuille Exo_5 : Probabilités.

Ex 1. On lance un dé indéfiniment.

On note : • pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : "le premier ❻ est à la position n".
• B : "Avant le premier ❻ il n'y a que des nombres pairs".

1) Montrer que (A_n) est un système quasi-complet d'événements.
2) Pour n fixé calculer la probabilité de $A_n \cap B$.
3) En déduire la probabilité de B ?
4) Quelle est la probabilité qu'avant le premier ❻ il y ait exactement deux nombres impairs ?

Ex 2. Deux joueurs A et B lancent deux dés parfaits.

A commence. Si la somme des points qu'il obtient est 6, il a gagné.

Sinon B lance les dés et si la somme des points qu'il obtient est 7, il a gagné.

Sinon A rejoue et ainsi de suite.

Le but de cet exercice est de déterminer quel joueur a la plus forte probabilité de gagner.

1) On observe dans un premier temps deux lancers successifs de deux dés.
   a. Calculer la probabilité qu'au premier lancer la somme fasse 6. On note A cet événement.
   b. Calculer la probabilité qu'au premier tirage la somme ne donne pas 6 et qu'au deuxiéme la somme fasse 7. On note B cet événement.
   c. Calculer la probabilité qu'au cours de cette épreuve on n'observe ni A, ni B.
2) On modélise l'expérience par : On réalise indéfiniment l'épreuve précédente.
   On note : pour chaque entier n, A_n " Pour la première fois où on observe A à la n-ième épreuve".
   a. Montrer que (A_n) est un système quasi-complet d'événements.
   b. On note G_a : "Avant le premier A on n'observe jamais B".
      ① Calculer pour chaque n la probabilité de $G_a \cap A_n$.
      ② En déduire la probabilité de G_a
   c. On note G_b : "Avant le premier B on n'observe jamais A". Calculer la probabilité de G_b.
3) Conclure.

Ex 3. On lance indéfiniment une pièce qui donne pile avec une probabilité $p \in]0,1[$.

Une urne contient initialement 2 boules blanches.

Après chaque Face obtenu on rajoute 2 boules noires dans l'urne.

Au premier Pile on tire deux boules simultanément dans l'urne. *(si on a Pile au premier lancer, on tire dans une urne contenant uniquement deux boules blanches)*

On note A_n : "on obtient le premier pile au $n^{\text{ième}}$ tirage" et B : "on obtient 2 boules blanches".

1) Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.
2) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de B sachant que A_n est réalisé.
3) Quelle est la probabilité de B ? *(On écrira le résultat sous la forme d'une somme)*

Dans la suite on prendra $p = \dfrac{1}{3}$.

4) Déterminer une valeur approchée de $P(B)$ en utilisant la somme trouvée à la question précédente.
5) Vérifier le résultat avec une série de simulations.

Ex 4. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 :

U_1 est composée de 3 boules blanches et 1 boule noire, U_2 est composée de 3 boules noires et 1 boule blanche.

On dispose également d'une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir Face est $\dfrac{2}{3}$

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois Face.

- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de Face est impair alors on tire une boule dans l'urne U_1.
- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de Face est pair alors on tire une boule dans l'urne U_2.

Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche : $P(B)$.

Ex 5. On lance un dé jusqu'à obtention d'un ❻ .
On cherche la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs.
On note : C : "avant le premier ❻ il n'y a que des ❷ et des ❹ ."
et pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : "Le premier ❻ apparait au n ième lancer".

1) a. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de l'évènement A_n ?
   b. En déduire que la suite (A_n) est un système quasi-complet d'événements.
   c. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de C sachant A_n ?
   d. En déduire la probabilité de C.
2) On note X le nombre de nombres impairs avant le premier ❻ .
   a. Pour chaque $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $(X = k)$ sachant A_n ?
   b. En déduire la probabilité de l'événement $(X = k)$.
   On admettra que pour tout $x \in [0, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

Ex 6. Deux pièces A et B sont reliées entre elles et seule le pièce B possède une ouverture sur l'extérieur.
Une guêpe initialement enfermée dans la pièce A voudrait sortir à l'extérieur.
Son trajet obéit aux règles suivantes :
- Lorsqu'elle est en A au temps n, alors au temps $n + 1$ elle reste en A avec la probabilité $1/3$ ou elle passe en B avec la probabilité $2/3$.
- Lorsqu'elle est en B au temps n, alors au temps $n + 1$ elle reste en B avec la probabilité $1/2$ ou elle retourne en A avec une probabilité de $1/4$ ou elle sort à l'air libre avec la probabilité $1/4$.

Au temps 0 la guêpe est en A et lorsqu'elle est sortie, elle ne revient pas.
On note, pour un entier naturel n :
A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement "la guêpe est en A (respectivement B, à l'extérieur) à l'instant n" ;
u_n, v_n et w_n les probabilités respectives de ces événements.

1) Interpréter les probabilités données dans l'énoncé.
2) Trouver une relation liant $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ avec u_n, v_n, w_n.
3) a. Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.
   b. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de u_n, v_n et w_n, interpréter ces limites.

Ex 7. *(Extrait du sujet G2E 2023)*
On fixe σ dans $\mathbb{N}^*$ et on considère une expérience aléatoire que l'on suppose modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et qui nécessite le matériel suivant :
- Une urne de taille infinie contenant initialement une boule noire et une boule blanche.
- Un stock infini de boules noires.
- Un stock infini de boules blanches.

Cette expérience aléatoire consiste à tirer successivement et indéfiniment une boule dans l'urne de façon aléatoire (les boules sont supposées indiscernables au toucher). À chaque étape, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle fixée pendant toute l'expérience : si on a tiré une boule noire, on ajoute σ boules noires, si on a tiré une boule blanche, on ajoute σ boules blanches.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ème tirage est noire, 0 si la boule tirée au n-ème tirage est blanche On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ égale au nombre de boules noires dans l'urne à l'issue du n-ème tirage.

1) a. Préciser l'ensemble des valeurs prises par S_n et justifier que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le système $(\mathscr{S})$ ci-dessous :

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} S_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = S_n + \sigma X_{n+1} \end{cases}$$

   b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in S_n(\Omega)$: $\quad P\left(X_{n+1} = 1 \mid S_n = s\right) = \dfrac{s}{2 + \sigma n}$
2) a. En calculant $P\left(X_{n+1} = 1\right)$, démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}\left(X_{n+1}\right) = \dfrac{\mathrm{E}\left(S_n\right)}{2 + \sigma n}$
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}\left(S_n\right) = \dfrac{2 + \sigma n}{2}$
   c. En déduire enfin la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).