Correction de la feuille Exo_5 : Probabilités.

Ex 1. 1) • Les événements de (A_n) sont deux à deux incompatibles.

En effet : si $n_1 \neq n_2$ le premier ❻ ne peut être au rang n_1 et au rang n_2.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n : "le $n$ième lancer donne un ❻ "

on a alors : $A_n = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap ... \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$ et comme les lancers sont indépendants on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S_k) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{(A_n) \text{ est un système quasi-complet d'événements}}$$

2) On note E_k : "Au k-ième lancer on obtient ❷ ou ❹ " et alors

$$A_n \cap B = E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap S_n$$

les lancers sont indépendants donc $P(E_k) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad P(A_n \cap B) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6}}$$

3) On a montré que $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est un système quasi complet d'événements donc *(Probabilités totales)*

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{4}}$$

4) On note : C : "avant le premier exactement deux nombres impairs" et

I_k : "Au k-ième lancer on obtient ❶ , ❸ ou ❺ " et alors

$$C \cap A_n = \underbrace{\left(I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap S_n\right) \cup \cdots \cup \left(E_1 \cap \cdots \cap I_{n-2} \cap I_{n-1} \cap S_n\right)}_{\text{réunions de } \binom{n-1}{2} \text{ événements 2 à 2 disjoints tous de probabilité } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \frac{1}{6}}$$

donc $\forall n \geqslant 3, \qquad P(C \cap A_n) = \dbinom{n-1}{2} \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3} \dfrac{1}{6}$

et enfin *(Probabilités totales)* on obtient :

$$\begin{aligned}
P(C) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(C \cap A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{48} \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \\
&= \frac{1}{48} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{48} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{27}{24 \times 8}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{9}{64}}$$

Un programme pour vérifier la cohérence de ces résultats.

```
import random as rd

# Ex 1 4)
def simul():
    pair = 0
    impair = 0
    x = rd.randint(1, 6)
    while x != 6:
        if x%2 == 0 :
            pair += 1
        else:
            impair += 1
        x = rd.randint(1, 6)
    return impair == 2

N = 100000
c = 0
for k in range(N):
    if simul():
        c += 1
print(c/N)     # on obtient bien une fréquence proche de 9/64
```

Ex 2. a.1) et b. Le lancer de deux dés est usuellement modélisé par $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ avec P uniforme.
et on fait deux lancers indépendants donc

$$P(A) = \frac{5}{36} \qquad \text{et} \qquad P(B) = \frac{31}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{31}{216}$$

Calculer la probabilité qu'au premier lancer la somme fasse 6. On note A cet événement.

c. On note C : "on n'observe ni A, ni B".

A, B, C forment un système complet donc $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ et alors :

$$\begin{aligned}
P(C) &= 1 - \frac{5}{36} - \frac{31}{216} \\
&= \frac{216 - 30 - 31}{216}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{155}{216}}$$

2) a. • Les événements de (A_n) sont deux à deux incompatibles.

En effet : si $n_1 \neq n_2$ le premier A ne peut être au rang n_1 et au rang n_2.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note K_n : "au $n$ième lancer on observe A"

on a alors : $A_n = \overline{K_1} \cap \overline{K_2} \cap ... \cap \overline{K_{n-1}} \cap K_n$ et comme les lancers sont indépendants on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(K_k) = \frac{5}{36} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \left(\frac{31}{36}\right)^{n-1} \frac{5}{36}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) &= \frac{5}{36} \times \frac{1}{1-\frac{31}{36}} \\ &= 1\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{(A_n) \text{ est un système quasi-complet d'événements}}$$

b. on note C_k : "au $k$ième lancer on observe C"

$$G_a \cap A_n = C_1 \cap \cdots C_{n-1} \cap K_n \qquad \text{donc} \quad P(G_a \cap A_n) = \left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} \frac{5}{36}$$

donc *(Probabilités totales)*

$$\begin{aligned}P(G_a) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_a \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} \frac{5}{36} \\ &= \frac{5}{36} \times \frac{1}{1-\frac{155}{216}} \\ &= \frac{5}{36} \times \frac{216}{61}\end{aligned}$$

$$\boxed{P(G_a) = \frac{30}{61}}$$

c. Avec le même raisonnement :

$$\begin{aligned}P(G_b) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} \frac{31}{216} \\ &= \frac{31}{216} \times \frac{1}{1-\frac{155}{216}} \\ &= \frac{31}{216} \times \frac{216}{61}\end{aligned}$$

$$\boxed{P(G_b) = \frac{31}{61}}$$

3) $\boxed{\text{Le joueur } B \text{ a une plus forte probabilité de gagner}}$.

Un programme pour vérifier la cohérence de ces résultats.

```
def simul():
    x = rd.randint(1, 6) + rd.randint(1, 6)
    while x != 6 :
        if rd.randint(1, 6) + rd.randint(1, 6) == 7 :
            return 2
        x = rd.randint(1, 6) + rd.randint(1, 6)
    return 1
```

```
N = 100000
c = 0
for k in range(N):
    if simul() == 1:
        c += 1
print(c/N)     # on obtient bien une fréquence proche de 30/61
```

Ex 3. *(non corrigé)*

Ex 4. *(non corrigé)*

Ex 5. *(non corrigé)*

Ex 6. *(non corrigé)*

Ex 7. *(non corrigé)*