

Fiche de révision – Variables aléatoires sur un univers fini

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Variables aléatoires

• Définition.

On appelle $\underbrace{\text{VAR}}_{\text{variable aléatoire réelle}}$ une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

• Valeurs prises par X .

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

• Notation d'événements.

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$$

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}.$$

• Système complet associé à X .

Lorsque $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ avec $x_1 < \dots < x_r$.

La famille $([X = x_i])_{1 \leq i \leq r}$ est un SCE.

• Loi de probabilité.

La loi de probabilité de X est l'application :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}([X = x]) \end{aligned}$$

• Fonction de répartition.

On appelle fonction de répartition de X la fonction :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}([X \leq x]) \end{aligned}$$

2. Espérance

• Définition.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x])$$

• Linéarité.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

• Théorème de transfert.

Pour $\varphi : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}([X = x])$$

3. Variance

• Définition.

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

• Propriété.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

• Formule de Kœnig-Huygens.

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

• Ecart-type

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

• Centrée réduite

La VAR centrée réduite associée à X est la VAR :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$$

4. Indépendance

• Définition

X et Y sont indépendantes signifie :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),$$

$$\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

• Propriété

si X, Y sont indépendantes

alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes.

• Espérance, variance.

Si X et Y sont indépendantes alors

$$E(XY) = E(X)E(Y) \text{ et } V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

• Généralisation à n variables.

Voir le cours : Définition, Propriétés (lemme de coalition), espérance d'un produit et variance d'une somme de VAR indépendantes.

5. Lois usuelles

• Loi certaine

La variable certaine égale à a est $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\omega \longmapsto a$

• Loi de Bernoulli

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p ; \quad \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p)$$

```
def bernoulli(p):
    if random() <= p:
        return 1
    return 0
```

• Loi uniforme

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$

Simulation de $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$

```
def uniforme_discret(a,b):
    return a + int((b-a+1)*random())
```

• Loi binomiale

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

Situation type : Schéma de Bernoulli.

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```