

- Ex 1.**
- 1) (*tableau 1*) On lance deux fois un dé. On note X la valeur maximale des deux nombres obtenues. Quelle est la loi de X ?
 - 2) (*tableau 2*) On tire successivement et sans remise deux boules d'une urne contenant initialement 3 boules rouges et 5 boules vertes. On note X le nombre de boules vertes obtenues. Quelle est la loi de X ?
 - 3) (*tableau 3*) On lance un dé 1000 fois. on note X le rang du premier 6 obtenu, si le 6 n'apparaît pas X prend la valeur 1000. Quelle est la loi de X ?
 - 4) (*tableau 4*) Une urne contient initialement une boule verte et une boule rouge. On effectue trois tirages successifs selon la procédure suivante :
 ❶ On tire une boule de l'urne ❷ On remet la boule tirée dans l'urne ❸ On ajoute une boule rouge dans l'urne.
 On note X le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de X ?
 - 5) (*tableau 5*) On lance deux dés classiques. On note X la somme des faces obtenues. Quelle est la loi de X ?
 - 6) (*tableau 6*) On lance 4 fois un dé. On note X la longueur de la plus longue série de 6. Quelle est la loi de X ?

- Ex 2.**
- 1) (*tableau 1*) On lance quatre dés. On note X le nombre de 6 obtenus. Quelle est la loi de X ? et quelle est son espérance ? sa variance ?
 - 2) (*tableau 2*) Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire successivement 2 jetons sans remise de l'urne et on note X le nombre de jetons obtenus portant un numéro pair. Quelle est la loi de X ? et quelle est son espérance ? sa variance ?
 - 3) (*tableau 3*) Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire 3 jetons simultanément. On note X la variable définie par : X prend la valeur 10 si on obtient le jeton numéroté 10 et -4 sinon. Quelle est la loi de X ? et quelle est son espérance ? sa variance ?
 - 4) (*tableau 4*) Une urne contient initialement deux boules vertes et trois boules rouges. On tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne. On note X le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de X ? et quelle est son espérance ? et sa variance ?
 - 5) (*tableau 5*) Une urne contient initialement deux boules vertes et trois boules rouges. On tire successivement et sans remise 3 boules de cette urne. On note X le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de X ? et quelle est son espérance ? sa variance ?
 - 6) (*tableau 6*) On lance 3 fois un dé équilibré. On note X la valeur maximale obtenue. Quelle est la loi de X ? et quelle est son espérance ? sa variance ?

Ex 3. (Loi hypergéométrique)

Une urne contient N boules, avec Np de boules rouges et Nq boules vertes. ($0 < q < 1$, $q = 1 - p$)

On tire dans cette urne un échantillon de n boules (tirage simultanée de n boules parmi N).

On note X le nombre de boules rouges contenues dans l'échantillon obtenu.

Le but de cet exercice est de calculer l'espérance de X (*qui suit la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$*)

Pour cela nous numérotions les boules rouges de l'urne de 1 à Np et nous définissons Np variables de Bernoulli $X_1, X_2, \dots, X_{Np}$ de la façon suivante :

$$\forall k \in \llbracket 1, Np \rrbracket, \quad X_k : \begin{cases} \omega \mapsto 1 & \text{si la boule numéro } k \text{ est dans l'échantillon } \omega \\ \omega \mapsto 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que $0 \leq n < Np$ et $0 \leq n < Nq$

- 1) a. Déterminer la loi de X .

b. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^n \binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}$$

- 2) a. Exprimer X en fonction des variables $X_1, X_2, \dots, X_{Np}$.

b. Pensez-vous que les variables $X_1, X_2, \dots, X_{Np}$ sont indépendantes les unes des autres ?

- 3) a. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, Np \rrbracket$, $E(X_k) = \frac{n}{N}$

b. En déduire l'espérance de X .

Ex 4. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \{1, \dots, n\}$, montrer que : $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$

Ex 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$

Ex 6. Une grenouille monte les $2n$ marches d'un escalier en sautant :

- ou bien une seule marche, avec la probabilité p .
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts et Y_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une seule marche au cours des n premiers sauts.

- 1) Déterminer la loi de Y_n . Exprimer X_n en fonction de Y_n . En déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.
- 2) On note Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ième}}$ marche. Exprimer, pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$, la probabilité $P(Z_n = k)$ en fonction des probabilités des événements $(Z_{n-1} = k - 1)$ et $(Z_{n-2} = k - 1)$, en déduire que : $E(Z_n) = pE(Z_{n-1}) + (1 - p)E(Z_{n-2}) + 1$
- 3) Déterminer un réel a pour que la suite (u_n) définie par $u_n = E(Z_n) - na$ soit récurrente linéaire d'ordre 2 ?
- 4) Calculer alors l'espérance de Z_n . Donner un équivalent de $E(Z_n)$ quand n tend vers l'infini et interpréter le résultat.

Ex 7. Une urne contient 3 boules : deux blanches numérotées ① et ② et une boule noire.

On effectue n tirages avec remise d'une boule.

On définit trois variables aléatoires :

- R : si on obtient au moins une boule noire, R est le rang de la première boule noire, sinon $R = n + 1$.
- X : si on obtient au moins une boule noire, X est le nombre de boules ① avant la première boule noire, sinon X est le nombre de boules ① obtenu.
- S : si on obtient au moins une boule noire, S est la somme des numéros obtenus avant la première boule noire, sinon S est la somme des numéros obtenus.

- 1) Trouver la loi de R .
- 2) Montrer que son espérance vaut : $3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. On pourra faire un raisonnement par récurrence.
- 3) Pour k entre 1 et $n + 1$ déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[R = k]$.
Quelle est l'espérance de cette loi ?
- 4) Déterminer l'espérance de X .
- 5) Exprimer S en fonction de X et de R .
- 6) En déduire l'espérance de S ?

Ex 8. (Exercice à faire en appliquant les résultats de la question Ex3).

Une urne contient 5 dés truqués et 15 dés normaux à six faces. Les dés truqués donnent 6 avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$. On prélève au hasard 5 dés de l'urne et on les lance et on note X le nombre de 6 obtenus.

- 1) Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
- 2) Ecrire un programme Python permettant d'évaluer l'espérance de X .

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de dés truqués prélevés dans l'urne.

- 3) Déterminer la loi de Y et son espérance.
- 4) Sachant que dans l'urne on n'a prélevé que des dés normaux, quelle est la loi de X et son espérance ?
- 5) Sachant que dans l'urne on n'a prélevé que des dés truqués, quelle est la loi de X et son espérance ?
- 6) Pour $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, on suppose que l'événement $(Y = i)$ est réalisé,
décrire alors l'expérience et déterminer pour la probabilité conditionnelle $P_{(Y=i)}$ l'espérance de X .

7) Montrer que : $E(X) = \sum_{i=0}^5 \left(P(Y = i) \times \sum_{k=0}^5 k P_{(Y=i)}(X = k) \right)$

8) En déduire que : $E(X) = \frac{25}{24}$