Correction de la feuille_Act_11 : Variables aléatoires finies.

Ex 1. 1) On prend pour modèle $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de P la probabilité uniforme (card$(\Omega) = 36$).

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$(X=1) = \{(1,1)\}$ donc card$(X=1) = 1$ et $P(X=1) = \dfrac{1}{36}$

$(X=2) = \{(1,2),(2,2),(2,1)\}$ donc card$(X=2) = 3$ et $P(X=2) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

...

On raisonne de même pour toutes les valeurs prises par X et on obtient en conclusion :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

ou

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

2) Pour $k=1$ et $k=2$, on note V_k : "le $k^{\text{ième}}$ tirage donne une boule verte".

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{0,1,2\}$,

$(X=0) = \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$ donc $P(X=0) = P(\overline{V}_1) \times P_{\overline{V}_1}(\overline{V}_2) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{28}$

$(X=1) = (\overline{V}_1) \cap V_2) \cup (V_1 \cap \overline{V}_2)$ (réunion disjointe)

donc $P(X=1) = P(\overline{V}_1) \times P_{\overline{V}_1}(V_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(\overline{V}_2) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{28}$

$(X=2) = V_1 \cap V_2$ donc $P(X=2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{14}$

En conclusion :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

Je ne donne que la réponse pour la suite, sauf pour le 6) .

3) $X(\Omega) = [\![0,1000]\!]$

et $\forall n \in [\![1,999]\!]$, $P(X=n) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ et $P(X=1000) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{999} + \left(\dfrac{5}{6}\right)^{1000} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{999}$

4)

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

5)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

6) $X(\Omega) = [\![0,4]\!]$.

$(X=0)$: "Aucun ❻ " donc $P(X=0) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4$

$(X=1)$: " Exactement un ❻ " ou " Exactement deux ❻ non cote à cote" donc

$$P(X=1) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Remarques : il y a 4 places possibles pour le ❻ tout seul : (6, ., ., .), (., 6, ., .),(., ., 6, .),(., ., ., 6).

il y a 3 places possibles pour les deux ❻ non cote à cote : (6, ., 6, .), (6, ., ., 6),(., 6, ., 6).

$(X=2)$: " Exactement deux ❻ cote à cote" ou "une série de un ❻ et une série de deux ❻ " donc

$$P(X=2) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

Remarques : il y a 3 places possibles pour les deux ❻ cote à cote : $(6,6,.,.)$, $(.,6,6,.)$,$(.,.,6,6)$.
il y a 2 places possibles pour l'autre configuration : $(6,.,6,6)$, $(6,6,.,6)$.

$(X=3)$: " Exactement trois ❻ cote à cote" , 4 places possibles pour les ❻ : $(6,6,6,.)$, $(6,6,6,.)$ donc

$$P(X=3) = 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

$(X=4)$: " Exactement quatre ❻ " donc $P(X=4) = \times \left(\frac{5}{6}\right)^4$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$4\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$	$2\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$

ou encore :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{575}{1296}$	$\frac{85}{1296}$	$\frac{10}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

Ex 2. 1) Cette expérience est constituée de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : "obtenir ❻ " de probabilité $\frac{1}{6}$) et X est le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } \left(4, \frac{1}{6}\right)}$$

On connaît l'espérance et la variance de cette loi usuelle :

$$\boxed{E(X) = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}}$$

2) On prend Ω l'ensemble des arrangements de 2 éléments de $[\![1;10]\!]$ avec la probabilité uniforme.
L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0,1,2\}$,
$(X=0)$: les arrangements de 2 éléments de l'ensemble des nombres pairs, $P(X=0) = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9}$

On raisonne pareil pour le reste de la loi pour obtenir :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

On trouve alors pour espérance : $E(X) = 0 + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{2}{9}$ et ainsi $\boxed{E(X) = 1}$

Le théorème de transfert donne $E(X^2) = 0^2 + 1^2 \times \frac{5}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} = \frac{13}{9}$

Et la formule de Kœnig-Huygens donne $V(X) = \frac{13}{9} - 1^2$ et ainsi $\boxed{V(X) = \frac{4}{9}}$

3) On prend Ω l'ensemble des combinaisons de 3 éléments de $[\![1;10]\!]$ avec la probabilité uniforme.
L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{-4, 10\}$,
$(X=10)$: les combinaisons de 3 éléments avec 10, $P(X=10) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$

et comme il n'y a que deux valeurs on obtient :

x_i	-4	10
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

On trouve alors pour espérance : $E(X) = -4 \times \frac{7}{10} + 10 \times \frac{3}{10}$ et ainsi $\boxed{E(X) = \frac{1}{5}}$

Le théorème de transfert donne $E(X^2) = (-4)^2 \times \frac{7}{10} + 10^2 \times \frac{3}{10} = \frac{206}{5}$

Et la formule de Kœnig-Huygens donne $V(X) = \frac{206}{5} - \frac{1}{5^2}$ et ainsi $\boxed{V(X) = \frac{1029}{25}}$

4) Cette expérience est constituée de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : "obtenir une boule rouge" de probabilité $\frac{3}{5}$) et X est le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } \left(3, \frac{3}{5}\right)}$$

On connaît l'espérance et la variance de cette loi usuelle :

$$\boxed{E(X) = \frac{9}{5} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{18}{25}}$$

5) On note R_k : "le k ième tirage donne une boule rouge"
L'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
$(X = 3) = R_1 \cap R_2 \cap R_3$ donc *(probabilités composées)* $P(X = 3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$
$(X = 2) = (\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3})$ donc *(incompatibilité 2 à 2)*

$$P(X = 2) = P(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3})$$

et ainsi *(probabilités composées)* :

$$P(X = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{12 + 12 + 12}{5 \times 4 \times 3} = \frac{3}{5}$$

Comme $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, on peut en déduire que : $P(X = 1) = 1 - P(X = 3) - P(X = 2) = \frac{3}{10}$

En conclusion :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

On trouve alors pour espérance : $E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{6}{10} + 3 \times \frac{1}{10}$ et ainsi $\boxed{E(X) = \frac{9}{5}}$

Remarque : on trouve le même résultat que pour 3). (Voir l'Ex3. sur la loi hypergéométrique).

Le théorème de transfert donne $E(X^2) = 1 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{6}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} = \frac{18}{5}$
Et la formule de Kœnig-Huygens donne $V(X) = \frac{18}{5} - \frac{81}{25}$ et ainsi $\boxed{V(X) = \frac{9}{25}}$

6) *(Non corrigé)*

Il faudrait que je le fasse en classe :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{2^3}{6^3} - \frac{1}{6^3}$	$\frac{3^3}{6^3} - \frac{2^3}{6^3}$	$\frac{4^3}{6^3} - \frac{3^3}{6^3}$	$\frac{5^3}{6^3} - \frac{4^3}{6^3}$	$1 - \frac{5^3}{6^3}$

Ex 3. 1) C'est un tirage simultané, on prend le modèle usuel :

Ω : ensemble des combinaisons à n éléments de l'urne, muni de la probabilité uniforme ($\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$)

a. L'ensemble des valeurs prise par X est $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $(X = k)$: " dans l'échantillon il y k boules rouges et $n - k$ boules vertes.

$$\text{donc} \qquad \text{card}(X = k) = \underbrace{\binom{Np}{k}}_{\text{choix des } k \text{ rouges}} \times \underbrace{\binom{Nq}{n-k}}_{\text{choix des } n-k \text{ vertes}}$$

En conclusion :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![0; n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0; n]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

b. $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$ donc $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$ ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$$

on en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}=\binom{N}{n}}$$

(Formule de Vandermonde)

2) a. Les X_k prennent pour valeur 0 ou 1, donc La variable aléatoire $\sum_{k=1}^{Np} X_k$ compte le nombre de k pour lequel X_k vaut 1, autrement dit le nombre de boules rouges dans l'échantillon donc

$$\boxed{X=\sum_{k=1}^{Np} X_k}$$

b. Montrons que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes : *(Rapidement)*

$$P(X_1=1)=\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n}{N},\quad P(X_2=1)=\frac{n}{N}\quad \text{et}\quad P(X_1=1,X_2=1)=\frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}}=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

or comme $n\neq 0$, on a les équivalences suivantes $\dfrac{n}{N}\times\dfrac{n}{N}=\dfrac{n(n-1)}{N(N-1)} \iff \cdots \iff n=N$

or on sait que $n<N$ donc $P(X_1=1)\times P(X_2=1)\neq P(X_1=1,X_2=1)$ et ainsi

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

3) a. Soit $k\in [\![1,Np]\!]$,
$(X_k=1)$ est "L'échantillon est formé de la boule rouge k et de $n-1$ autres boules" donc

$$P(X_k=1)=\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n}{N}\qquad \text{donc}\qquad X\hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n}{N}\right)\qquad \text{et ainsi :}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in[\![1,Np]\!],\quad E(X_k)=\frac{n}{N}}$$

b. L'espérance est une application linéaire et $X=\sum_{k=1}^{Np} X_k$ donc $E(X)=\sum_{k=1}^{Np} E(X_k)$

or $E(X_k)=\dfrac{n}{N}$ donc

$$\boxed{E(X)=np}$$

On peut remarquer qu'en moyenne la proportion de boules rouges est la même dans l'échantillon et dans l'urne.

Ex 4.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(X\geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} P(X=j) && \text{car } X(\Omega)\subset[\![1,n]\!]\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} P(X=j) && \textit{inversion d'une somme triangulaire}\\
&= \sum_{j=1}^{n} jP(X=j)\\
&= E(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{n} P(X\geqslant k)}$$

Ex 5. $X(\Omega)$ est fini et $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ est définie sur $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc *(d'après le théorème de transfert)*

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \textit{Propriété des coefficients binomiaux} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \right) \\
E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \frac{1}{p(n+1)} \left((p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{\left(1-(1-p)^{n+1}\right)}{p(n+1)}}$$

Ex 6. *(non corrigé)*

Ex 7. *(non corrigé)*

Ex 8. (*Ici on utilise les résultats de l'***Ex 3**).

1) L'ensemble des valeurs prises par X est : $\boxed{X(\Omega) = [\![0; 5]\!]}$
2) Pour estimer l'espérance de X on simule la loi de X avec la fonction suivante, puis on estime l'espérance avec la moyenne empirique sur 10000 simulations que calcule le programme ci-contre.

```
def simulX():
    Urne = 5*[0]+15*[1]
    S = []
    for k in range(5):
        a = randrange(len(Urne))
        S.append(Urne.pop(a))
    X = 0
    for k in range(5):
        if S[k] == 0:
            p = 1/3
        else:
            p = 1/6
        a = random()
        if a <= p:
            X += 1
    return X
```

```
N=10000
nb=0
for k in range(N):
    nb += simulX()
print(nb/N)
```

Le principe utilisé dans la fonction `simulX()` :
On fait un tirage sans remise dans une liste avec cinq 0 et quinze 1, les 0 représentent les dés truqués, les 1 les dés équilibrés, le résultat de ces tirages est dans la liste `S`.
Ensuite on parcours `S` si on a un 0 on simule une bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$ sinon une bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{6}$. La valeur retournée a compté le nombre de 1 (de pile) obtenu au cours de ces 5 Bernoulli.

3) Le début de l'expérience est un tirage simultané de cinq dés dans l'urne qui contient 20 dés et une proportion de $\dfrac{1}{4}$ de dés truqués, on est dans la situation étudiée dans l'Ex3.

Y est égale au nombre de dés truqués obtenus, donc *(avec les résultats de l'Ex3)* $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{H}\left(20, 5, \frac{1}{4}\right) \quad \text{et} \quad E(Y) = \frac{5}{4}}$

4) Si dans l'urne on a prélevé que des dés normaux, (On raisonne avec la probabilité $P_{[Y=0]}$)

L'expérience consiste au lancer de 5 dés normaux, et X est le nombre de 6 obtenu, on a donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{6}\right) \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{5}{6} \quad \textbf{pour la probabilité } \boldsymbol{P_{[Y=0]}}}$$

5) Si dans l'urne on a prélevé que des dés truqués, (On raisonne avec la probabilité $P_{[Y=5]}$)

L'expérience consiste au lancer de 5 dés truqués, et X est le nombre de 6 obtenu, on a donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{5}{3} \quad \textbf{pour la probabilité } \boldsymbol{P_{[Y=5]}}}$$

6) Si l'événement $[Y = i]$ est réalisée, (On raisonne avec la probabilité $P_{[Y=i]}$)

L'expérience consiste au lancer de i dés truqués et $5 - i$ dés normaux, et X est le nombre de 6 obtenu, on a donc

$X = X_1 + X_2$ où X_1 est le nombre de 6 obtenus avec les dés truqués et X_2 avec les dés normaux.

on a $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(i, \frac{1}{3})$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(5 - i, \frac{1}{6})$ donc $E(X_1) = \frac{i}{3}$ et $E(X_2) = \frac{5-i}{6}$

et comme $E(X) = E(X_1) + E(X_2)$, on a : $\boxed{E(X) = \frac{i}{3} + \frac{5-i}{6} = \frac{i}{6} + \frac{5}{6} \quad \textbf{pour la probabilité } \boldsymbol{P_{[Y=i]}}}$

Remarque : cette formule est encore valable pour $i = 0$ et $i = 5$.

7)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{5} k\, P([X = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{5} k \sum_{i=0}^{5} P([Y = i]) P_{[Y=i]}([X = k]) \\
&= \sum_{i=0}^{5} \left(P([Y = i]) \times \sum_{k=0}^{5} k\, P_{[Y=i]}([X = k]) \right)
\end{aligned}$$

8)

$$E(X) = \sum_{i=0}^{5} P([Y = i]) \times \underbrace{\sum_{k=0}^{5} k\, P_{[Y=i]}([X = k])}_{\text{Espérance de } X \text{ pour } P_{[Y=i]}}$$

or l'espérance de X pour la probabilité $P_{[Y=i]}$ est égale à : $\frac{i}{6} + \frac{5}{6}$ donc :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{5} \left(P([Y = i]) \times \left(\frac{i}{6} + \frac{5}{6} \right) \right) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{5} i\, P([Y = i]) + \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{5} P([Y = i]) \\
&= \frac{1}{6} E(Y) + \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{5}{4} + \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{25}{24}}$$

Bonne remarque de Lucas : On peut aussi utiliser le théorème de transfert pour ce dernier calcul :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{5} \left(P([Y = i]) \times \left(\frac{i}{6} + \frac{5}{6} \right) \right) = E\left(\frac{Y}{6} + \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{6} E(Y) + \frac{5}{6}$$