Correction du devoir maison 3 rendu le jeudi 13 novembre

Exercice 1

1) *Voir le cours, ici c'est un cas particulier, on multiplie des matrices carrées.*

2) en prenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB \neq BA$ *En effet :* $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) *La multiplication est associative même avec des matrices non carrées*
On prend trois matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ o
pour i et j deux entiers respectivement dans $[\![1, p]\!]$ et dans $[\![1, s]\!]$,

$$\begin{aligned}
(A(BC))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q} (A)_{i,k}(BC)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{q} (A)_{i,k} \sum_{h=1}^{r} (B)_{k,h}(C)_{h,j} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \sum_{h=1}^{r} (A)_{i,k}(B)_{k,h}(C)_{h,j} \\
&= \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} (A)_{i,k}(B)_{k,h}(C)_{h,j} \\
&= \sum_{h=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{q} (A)_{i,k}(B)_{k,h} \right) (C)_{h,j} \\
&= \sum_{h=1}^{r} (AB)_{i,h} \ (C)_{h,j} = ((AB)C)_{i,j}
\end{aligned}$$

On a montré que tous les coefficients sont égaux donc : $\boxed{A(BC) = (AB)C}$.

4) Soient A et B deux matrices de E,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{j,i} A_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{j,i} A_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{j,j}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

5) Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a : $\operatorname{tr}(ABC) = -2$ et $\operatorname{tr}(BAC) = 0$

Exercice 2

1) *Question de cours :* $\boxed{\text{card}(E) = n^p}$

2) *Voir feuille_ calcul_ 3*

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \min(i,j) &= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min(i,j)+\sum_{i=1}^{n}\min(i,i) \qquad \textit{car } \min(i,j)=\min(j,i)\\
&= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i \;+\; \sum_{i=1}^{n} i\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} i \;+\sum_{i=1}^{n} i\\
&= \sum_{j=1}^{n}(j-1)j \;+\sum_{j=1}^{n} j\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le résultat est vrai pour } p=2}$

3) Le cardinal de $[\![k;n]\!]$ est $n-k+1$ et $B_k = [\![k;n]\!]^p$ donc : $\boxed{\text{card}(B_k) = (n-k+1)^p}$

4) $\boxed{B_k = \bigcup_{i=k}^{n} A_i}$ En effet : Pour chaque $k \in [\![1;n]\!]$ et ℓ un élément quelconque de E,

$$\begin{aligned}
\ell \in B_k &\iff \min(\ell) \geqslant k\\
&\iff \exists i \in [\![k;n]\!] : \quad \min(\ell) = i\\
&\iff \exists i \in [\![k;n]\!] : \quad \ell \in A_i\\
&\iff \ell \in \bigcup_{i=k}^{n} A_i
\end{aligned}$$

5) $S = \sum_{\ell\in E}\min(\ell)$ et les ensembles A_i forment une partition de E, donc : $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell\in A_i}\min(\ell)$

(Voir cours sur un ensemble fini)

or pour chaque ℓ de A_i on a $\min(\ell) = i$ et il vient : $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell\in A_i} i$ ou encore : $\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} i \,\text{card}(A_i)}$

6)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} i\,\text{card}(A_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\text{card}(A_i) \qquad \text{("Astuce" vue en classe)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\text{card}(A_i) \qquad \text{Inversion des sommes triangulaires}
\end{aligned}$$

or $B_k = \bigcup_{i=k}^{n} A_i$ et les A_i sont 2 à 2 disjoints donc : $\text{card}(B_k) = \sum_{i=k}^{n}\text{card}(A_i)$ et ainsi : $\boxed{S = \sum_{k=1}^{n}\text{card}(B_k)}$

7) Les résultats des questions 3) et 6) donnent $S = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^p$

et en faisant un changement d'indice il vient : $\boxed{\sum_{\ell\in E}\min(\ell) = \sum_{k=1}^{n} k^p}$

8) *(A voir en TD)*

Problème 1

Questions préliminaires :

1) a) A-B-F et A-E-F sont les deux seuls chemins de longueur 2 qui mènent de A à F.

$$\boxed{\text{Exactement deux chemins de longueur 2 qui mènent de A à F.}}$$

b) A-B-A, A-D-A et A-E-A sont les trois seuls chemins de longueur 2 qui mènent de A à F.

$$\boxed{\text{Exactement trois chemins de longueur 2 qui mènent de A à A.}}$$

c) Il est impossible d'aller de A à E en deux déplacements. $\boxed{\text{Aucun chemin de longueur 2 mène de A à E.}}$

d) A chaque étape on a trois choix possibles il y donc $\boxed{3^2 = 9 \text{ chemins de longueurs 2 partant de A}}$.
On peut les écrire : A-B-A, A-B-C A-B-F, A-E-A, A-E-F, A-E-H, A-D-A, A-D-C, A-D-H

2) a) A-B-C-G, A-B-F-G, A-E-F-G, A-E-H-G, A-D-C-G, A-D-H-G

$$\boxed{\text{Exactement 6 chemins de longueur 3 qui mènent de A à G.}}$$

b) Après aucun des chemins de longueur 2 on peut revenir en A.

$$\boxed{\text{Aucun chemin de longueur 3 mène de A à A.}}$$

c) A chaque étape on a trois choix possibles il y donc $\boxed{3^3 = 27 \text{ chemins de longueurs 3 partant de A}}$.

Partie 1 :

1) $M^3 = M^2 \times M$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 7 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 6 & 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 6 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & 7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

2) En observant les coefficients et les calculs des questions préliminaires, on peut faire la conjecture que :

$\boxed{\text{le coefficient de } (i,j) \text{ de } M^n \text{ semble être le nombre de chemins de longueurs } n \text{ allant du point } i \text{ au point } j}$

3) Montrons par récurrence sur n la propriété suivante :

P_n : « le coefficient (i,j) de M^n est le nombre de chemins de longueurs n allant du point i au point j »

(I) Pour $n = 1$,
Par définition de la matrice M on a bien :

le coefficient de (i,j) de M est le nombre de chemins de longueurs 1 allant du point i au point j.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tel que P_n est vraie,

$$M^{n+1} = M^n \times M \qquad \text{donc pour } (i,j) \in [\![1;8]\!]^2, \quad (M^{n+1})_{i,j} = \sum_{k=1}^{8} (M^n)_{i,k} \times M_{k,j}$$

or $M_{k,j}$ est le nombre de chemins de longueur 1 entre les points k et j,
et d'après l'hypothèse de récurrence $(M^n)_{i,k}$ est le nombre de chemins de longueur n entre les points i et k.
on en déduit que $(M^n)_{i,k} \times M_{k,j}$ est le nombre de chemins de longueur $n+1$ entre les points i et j et passant par le point k juste avant j,
et en faisant la somme pour k allant de 1 à 8 on obtient bien le nombre de chemins de longueur $n+1$ entre les points i et j.

on a bien montré que : P_n entraine P_{n+1}

(C) En conclusion : Pour tout entier naturel non nul n,

$\boxed{\text{le coefficient de } (i,j) \text{ de } M^n \text{ est le nombre de chemins de longueurs } n \text{ allant du point } i \text{ au point } j}$

Partie 2 : Etude des matrices M^n.

1) a) • Les réels α et β doivent vérifier le système $\left\{\begin{array}{l}21\alpha+3\beta=9\\20\alpha+2\beta=0\end{array}\right.$ donc sont nécessairement $\left\{\begin{array}{l}\alpha=-1\\\beta=10\end{array}\right.$

• Réciproquement on vérifie bien qu'ils conviennent.

$$\boxed{-M^4+10M^2=9I_8}$$

b) La relation précédente permet d'affirmer que : $M\times\frac{1}{9}\left(-M^3+10M\right)=\frac{1}{9}\left(-M^3+10M\right)\times M=I_8$

donc $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1}=\frac{1}{9}\left(-M^3+10M\right)}$

c) $M^{-1}=\frac{1}{9}\left(-M^3+10M\right)$ donc $M^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0&-2&0\\1&0&1&0&0&1&0&-2\\0&1&0&1&-2&0&1&0\\1&0&1&0&0&-2&0&1\\1&0&-2&0&0&1&0&1\\0&1&0&-2&1&0&1&0\\-2&0&1&0&0&1&0&1\\0&-2&0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}$

2) a) **(Rédaction délicate, question très classique)**

La rédaction habituelle :

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\underbrace{\text{il existe } (a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } M^{2n}=a_nM^2+b_nI_8}_{\text{(On note } P_n \text{ cette proposition)}}$

(I) : Pour $n=0$,
On a bien $M^0=0.M^2+1.I_8$ soit $M^0=a_0M^2+b_0I_8$ avec $a_0=0$ et $b_0=1$.

P_0 est vraie.

(H) : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que P_n est vraie,
On a : $M^{2(n+1)}=M^2.M^{2n}$ et l'hypothèse de récurrence donne : $M^{2n}=a_nM^2+b_nI_8$ donc

$$M^{2(n+1)}=a_nM^4+b_nM^2.$$

Or, on a $M^4=10M^2-9I_8$ d'où l'on obtient : $M^{2(n+1)}=(10a_n+b_n)M^2-9a_nI_8$.
En posant $a_{n+1}=10a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-9a_n$, il vient :$M^{2n+2}=a_{n+1}M^2+b_{n+1}I_8$.

on a bien montré que P_n entraîne P_{n+1}

(C) En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ il existe } (a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } M^{2n}=a_nM^2+b_nI_8}$

on a de plus montrer dans cette récurrence que l'on pouvait définir (a_n) et (b_n) par les relations suivantes :

$$\boxed{a_0=0\quad b_0=1\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=10\,a_n+b_n\qquad\text{et}\qquad b_{n+1}=-9\,a_n}$$

Une raisonnement plus simple :

On note (a_n) et (b_n) les deux suites définies par :

$$a_0=0\quad b_0=1\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=10\,a_n+b_n\qquad\text{et}\qquad b_{n+1}=-9\,a_n$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\underbrace{M^{2n}=a_nM^2+b_nI_8}_{\text{(On note } P_n\text{)}}$

(I) : Pour $n=0$,
On a $M^0=I_8$ et $a_0M^2+b_0I_8=0.M^2+1.I_8=I_8$, P_0 est vraie.

(H) : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que P_n est vraie,
On a : $M^{2(n+1)}=M^2.M^{2n}$ et l'hypothèse de récurrence donne : $M^{2n}=a_nM^2+b_nI_8$ donc

$$M^{2(n+1)}=a_nM^4+b_nM^2.$$

Or, on a $M^4=10M^2-9I_8$ d'où l'on obtient : $M^{2(n+1)}=(10a_n+b_n)M^2-9a_nI_8$.
sachant que $a_{n+1}=10a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-9a_n$, il vient : $M^{2n+2}=a_{n+1}M^2+b_{n+1}I_8$. (P_{n+1})

(C) En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ tel que } M^{2n}=a_nM^2+b_nI_8}$

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ il existe } (a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } M^{2n}=a_nM^2+b_nI_8}$$

b) Le relations précédentes donnent : $\boxed{a_0 = 0,\ \ a_1 = 1\ \text{ et }\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 10a_{n+1} - 9a_n}$

c) L'équation caractéristique de la relation précédente est : $x^2 - 10x + 9 = 0$ et a pour solution 1 et 9.
il existe donc λ et μ tel que $(a_n) = (\lambda + \mu 9^n)$

et en utilisant $a_0 = 0,\ \ a_1 = 1$, il vient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{9^n - 1}{8}}$

et en utilisant la relation $(b_{n+1}) = -9(a_n)$, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{9 - 9^n}{8}}$

3) a) $M^{2n} = a_n M^2 + b_n I_8$ donc les coefficients diagonaux de M^{2n} sont tous égaux à : $3a_n + b_n$

$$\boxed{\text{les coefficients diagonaux de } M^{2n} \text{ sont tous égaux à : } \dfrac{9^n + 3}{4}}$$

b) $M^{2n} = a_n M^2 + b_n I_8$ donc $M^{2n+1} = a_n M^3 + b_n M$

$$\boxed{\text{les coefficients diagonaux de } M^{2n+1} \text{ sont tous nuls}}$$

Partie 3 :

1) Le coefficient $(1,1)$ de la matrice M^{2n} est égal à : $\dfrac{3^{2n} + 3}{4}$ et M^{2n+1} est égal à : 0 .

donc si n est pair alors le nombre de chemin de longueur n menant de A à A est égal à $\dfrac{3^n + 3}{4}$ et si n est impair il n'y a aucun chemin de longueur n qui mène de A à A.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair, alors la probabilité que le mobile revienne en } A \text{ vaut } \dfrac{3^n + 3}{4 \times 3^n}\text{, sinon elle est nulle.}}$$

2) a) Le nombre de chemins de longueur 2 qui mènent de A en A est égal à : 3 (*voir* M^2).
donc $\mathbb{P}(R_2) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ et ainsi : $\boxed{\mathbb{P}(\overline{R_2}) = \dfrac{2}{3}}$

b) Si $\overline{R_2}$ est réalisé, en observant M^2 on peut affirmer que le mobile est en F, C ou H.
et en partant de tout ces points la probabilité de revenir au point de départ est égal à $\dfrac{2}{9}$, donc $\mathbb{P}_{\overline{R_2}}(R_4) = \dfrac{2}{9}$

et ainsi : $\boxed{\mathbb{P}_{\overline{R_2}}(\overline{R_4}) = \dfrac{7}{9}}$

c) $\mathbb{P}\left(\overline{R_2} \cap \overline{R_4} \cap \overline{R_6} \cap R_8\right) = \mathbb{P}\left(\overline{R_2}\right) \mathbb{P}_{\overline{R_2}}(\overline{R_4}) \mathbb{P}_{\overline{R_2} \cap \overline{R_4}}(\overline{R_6}) \mathbb{P}_{\overline{R_2} \cap \overline{R_4} \cap \overline{R_6}}(R_8)$ ce qui revient à :

$$\mathbb{P}\left(\overline{R_2} \cap \overline{R_4} \cap \overline{R_6} \cap R_8\right) = \mathbb{P}\left(\overline{R_2}\right) \mathbb{P}_{\overline{R_2}}(\overline{R_4}) \mathbb{P}_{\overline{R_4}}(\overline{R_6}) \mathbb{P}_{\overline{R_6}}(R_8) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{9}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'il revienne à sa position de départ au 8ème déplacement et pas avant est égale à : } \dfrac{196}{2187}}$$

3) Je dénombre "à la main" :
$\underbrace{ABCD}HEFG\ \underbrace{ABCD}HGFE\ \underbrace{ADCB}FEHG\ \underbrace{ADCB}FGHE$
autant en commençant par $\{A, B, F, E\}$ ou $\{A, D, H, E\}$
il y a encore $\underbrace{AB}C\underbrace{G}FEHD \qquad \underbrace{AB}F\underbrace{G}CDHE$
autant en commençant par AE et autant commençant par AD (avec G en place 4)
en tout, il y a $12 + 6 = 18$ chemins de longueurs 7 partant de A où on rencontre tous les sommets.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'au cours des 7 premiers déplacements il ne passe jamais par le même sommet vaut } \dfrac{2}{243}}$$

Problème 2

Partie 1

Pour expliquer les calculs de probabilité on utilisera le modèle suivant :

Pour univers Ω : l'ensemble des mots de longueurs 6 avec uniquement des P et des F muni de la probabilité uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 2^6$)

On pourrait tout aussi bien prendre $\{0,1\}^6$ *en convenant que* 0 *: "face" et* 1 *: "pile".*

1) a) i. Pour que A_k soit réalisé on a nécessairement $\overline{F_{k-2}} \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k$ et avant on ne peut pas avoir de *"Face"* avant sinon B aurait gagné ; autrement dit : $A_k \subset \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k$

Réciproquement si $\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k$ est réalisé alors A_k aussi.

$$\boxed{\text{pour tout } k \text{ entre 3 et 6,} \quad A_k = \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k}$$

ii. A ne peut gagner en moins de trois lancers donc $\boxed{P(A_1) = 0,\ P(A_2) = 0}$

et les lancers étant indépendants on a pour tout k entre 3 et 6, $\quad P(\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k) = \dfrac{1}{2^k}$

ou encore $\boxed{\text{pour tout } k \text{ entre 3 et 6,} \quad P(A_k) = \dfrac{1}{2^k}}$

iii. Les événements A_3, A_4, A_5 et A_6 forment une partition de l'événement A donc

$$P(A) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6)$$

On a bien :

$$\boxed{P(A) = \frac{15}{64}}$$

b) i. Si deux *"Pile"* sont suivis ou précédés d'une *"Face"* l'un des deux joueurs gagnent.

La seule situation où on peut observer deux piles et D est celle où on a que des *"Pile"*.

ii. $D \cap C_0 = C_0$: « obtenir que des "Face" » $C_0 = \{\text{FFFFFF}\} = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap F_6$

$$P(D \cap C_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$D \cap C_1 = C_1$: « obtenir exactement un "Pile" » $C_1 = \{\text{PFFFFF}, \ldots, \text{FFFFFP}\}$

$$P(D \cap C_1) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{32}$$

Il n'y a que 10 éléments de C_2 qui réalisent D

(Les anagrammes de PPFFFF où les deux P ne sont pas contigus)

$$P(D \cap C_2) = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{32}$$

Il y a 4 éléments de C_3 qui réalisent $D \quad D \cap C_3 = \{\text{PFPFPF}, \text{FPFPFP}, \text{PFPFFP}, \text{PFFPFP}\}$

$$P(D \cap C_3) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{16}$$

Les événements C_4 et C_5 sont incompatibles avec D donc $\quad P(D \cap C_4) = P(D \cap C_5) = 0$

et enfin $D \cap C_6 = C_6$: « obtenir que des "Pile" »

$$P(D \cap C_6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

iii. C_0, C_1, ...,C_6 forment un système complet d'événements donc en utilisant la formule des probabilités totales on a : $P(D) = P(D \cap C_0) + P(D \cap C_1) + \cdots + P(D \cap C_6)$

d'où :

$$\boxed{P(D) = \frac{11}{32}}$$

c) Les événements A, B et D forment un système complet d'événements donc

$$P(B) = 1 - P(A) - P(D) = \frac{27}{64}$$

donc $P(A) < P(B)$

$$\boxed{\text{Le joueur } B \text{ a la plus grande probabilité de gagner}}$$

2) a) Tous les éléments de A réalisent P_1 donc $A \cap P_1 = A$ donc $P_{P_1}(A) = \dfrac{P(A)}{P(P_1)} = \dfrac{\frac{15}{64}}{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{P_{P_1}(A) = \frac{15}{32}}$$

b)

$$P_{P_1}(D \cap C_0) = 0 \qquad P_{P_1}(D \cap C_1) = \frac{P(P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_6)}{P(P_1)} = \frac{1}{32}$$

$$P_{P_1}(D \cap C_2) = \frac{P(P_1 \cap D \cap C_2)}{P(P_1)} = \frac{\frac{4}{2^6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \qquad P_{P_1}(D \cap C_3) = \frac{P(P_1 \cap D \cap C_3)}{P(P_1)} = \frac{\frac{3}{2^6}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{32}$$

$$P_{P_1}(D \cap C_4) = P_{P_1}(D \cap C_5) = 0 \qquad P_{P_1}(D \cap C_6) = \frac{P(C_6)}{P(P_1)} = \frac{1}{32}$$

on a ainsi

$$P_{P_1}(D) = \frac{9}{32}$$

et comme A, B et D forment un système complet d'événements on a

$$P_{P_1}(B) = 1 - P_{P_1}(A) - P_{P_1}(D) = 1 - \frac{15}{32} - \frac{9}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Si on observe } P_1\text{, le joueur } A \text{ a une plus grande probabilité de gagner.}}$$

3) a) Tous les éléments de A réalisent $P_1 \cap P_2$ donc $A \cap P_1 \cap P_2 = A$ donc $P_{P_1 \cap P_2}(A) = \dfrac{P(A)}{P(P_1 \cap P_2)} = \dfrac{\frac{15}{64}}{\frac{1}{4}}$

$$\boxed{P_{P_1 \cap P_2}(A) = \frac{15}{16}}$$

b) B et $P_1 \cap P_2$ sont incompatibles donc $P_{P_1 \cap P_2}(B) = 0$

$$\boxed{\text{Si on observe } P_1 \cap P_2\text{, le joueur } A \text{ a une plus grande probabilité de gagner.}}$$

Partie 2

1) a) `piece` est une fonction aléatoire renvoyant les valeurs 1 et 0 suivant la loi de probabilité :

0	1
(1-p)	p

$$\boxed{\text{Elle permet de simuler le lancer d'une pièce.}}$$

b) La fonction `jeu` est une fonction aléatoire renvoyant les valeurs 1, 2 et `None` suivant la loi de probabilité :

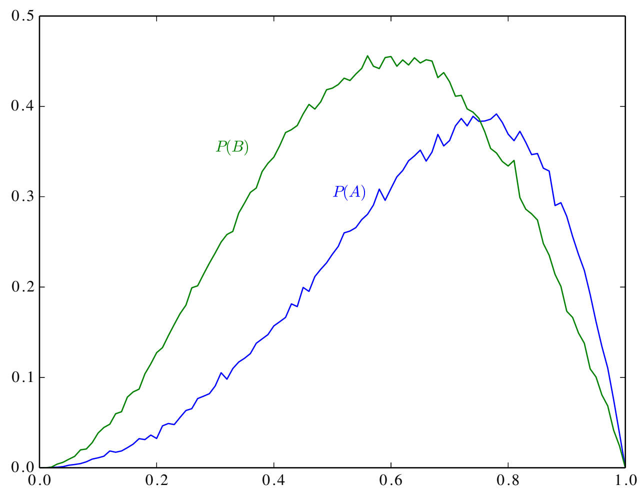
1	2	`None`
$P(A)$	$P(B)$	$P(D)$

$\boxed{\text{Elle permet de simuler le jeu, elle renvoie 1 quand } A \text{ gagne et 2 quand } B \text{ gagne.}}$

c) Le programme fait des simulations pour estimer $P(A)$ et $P(B)$ pour différentes valeurs de p.
`x` contient les différentes valeurs de p
`y` contient les valeurs approchées de $P(A)$ pour chaque valeur de p.
`z` contient les valeurs approchées de $P(B)$ pour chaque valeur de p.

d) Les deux courbes représentent une estimation de $P(A)$ et de $P(B)$ en fonction de p.

La question 1) de la partie 1 donne pour $p = \dfrac{1}{2}$, $P(A) < P(B)$ ce qui permet d'identifier $P(A)$ et $P(B)$



2) a) $P(A)$ semble maximale pour $p \approx 0{,}8$, $P(B)$ semble maximale pour $p \approx 0{,}6$

b) Le maximum de $P(A)$ semble proche de 0,4 et celui de $P(B)$ proche de 0,45

c) La valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré semble proche de 0,75

3) a) i. Les raisonnements sont les mêmes que dans la question 1) de la **Partie 1**.

$$P(A) = p^2(1-p) + p^3(1-p) + p^4(1-p) + p^5(1-p)$$

On a bien :

$$\boxed{P(A) = p^2(1-p^4) = p^2(1-p^2)(1+p^2)}$$

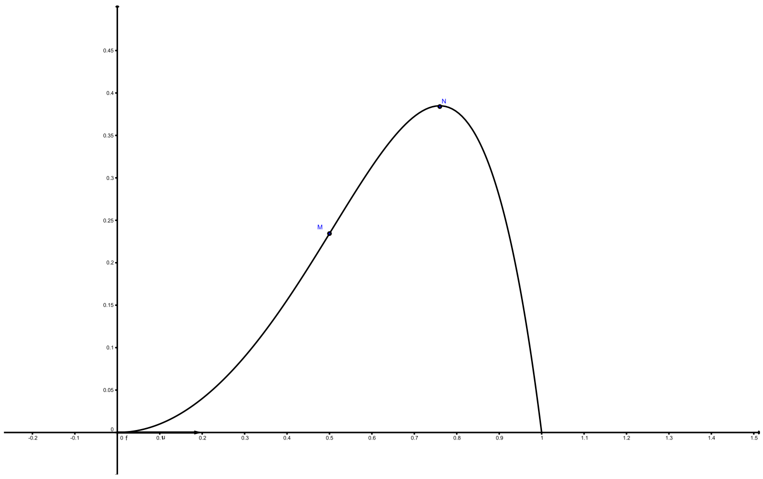
ii. L'étude de ce polynôme ne pose pas de problème particulier on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$		1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

iii. L'étude sur $[0,1]$ de la fonction $x \longmapsto x^2(1-x^4)$ montre que :

$$\boxed{P(A) \text{ est maximum pour } p = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \text{ et la valeur de ce maximum est } \frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

iv. On commence par placer des points et des tangentes avant de tracer une courbe.



b) i. $D \cap C_0 = C_0$: « obtenir que des "Face" »

$$P(D \cap C_0) = (1-p)^6$$

$D \cap C_1 = C_1$: « obtenir exactement un "Pile" »

$$P(D \cap C_1) = 6p(1-p)^5$$

Il n'y a que 10 éléments de C_2 qui réalise D
donc

$$P(D \cap C_2) = 10p^2(1-p)^4$$

Il y a 4 éléments de C_3 qui réalise D
donc

$$P(D \cap C_3) = 4p^3(1-p)^3$$

Calculer pour tout k entre 0 et 6 la probabilité de $D \cap C_k$.
Les événements C_4 et C_5 sont incompatibles avec D

$$P(D \cap C_4) = P(D \cap C_5) = 0$$

et enfin $D \cap C_6 = C_6$: « obtenir que des "Pile" »

$$P(D \cap C_6) = p^6$$

d'où

$$P(D) = (1-p)^6 + 6\,p(1-p)^5 + 10\,p^2(1-p)^4 + 4\,p^3(1-p)^3 + p^6$$

ii. Or on sait que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ donc

$$P(B) = 1 - p^2(1-p^4) - (1-p)^6 - 6\,p(1-p)^5 - 10\,p^2(1-p)^4 - 4\,p^3(1-p)^3 - p^6$$

et après quelques calculs :

$$P(B) = -p^6 + 4p^5 - 3p^4 - 4p^3 + 4p^2$$

en développant $p^2(1-p^2)(2+p)^2$ on retrouve : $-p^6 + 4p^5 - 3p^4 - 4p^3 + 4p^2$
d'où :

$$\boxed{P(B) = p^2(1-p^2)(p-2)^2}$$

iii. (*Rapidement*)

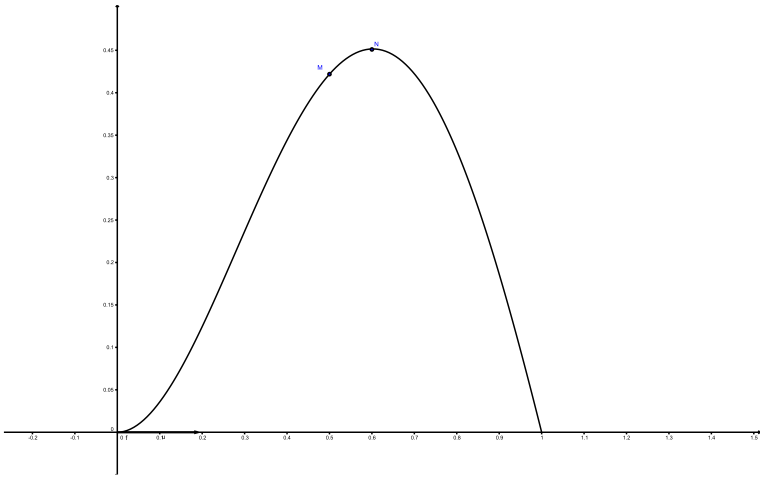
$$\forall x \in [0,1], \qquad g'(x) = -2x(x-2)(3x^3 - 4x^2 - 2x + 2)$$

$3x^3 - 4x^2 - 2x + 2$ s'annule une seule fois sur $[0,1]$ en une valeur comprise entre 0,6 et 0,7.

x	0		$\approx 0{,}6$		1
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\approx 0{,}45$	$\searrow$	0

iv. Cette valeur est comprise entre 0,6 et 0,7.
Il faut évaluer $3x^3 - 4x^2 - 2x + 2$ en 0,6 et 0,7, cela peut se faire sans calculatrice.

v.



c) Soit $p \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} P(A) = P(B) &\iff p^2(1-p^2)(p-2)^2 = p^2(1-p^2)(1+p^2) \\ &\iff p^2 - 4p + 4 = 1 + p^2 \\ &\iff p = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En dehors des cas } p = 0 \text{ et } p = 1\text{, le jeu est équitable pour } p = \frac{3}{4}}$$