

Fiche de révision – Equations différentielles

1. Equations diff. homogènes

1.1. Eq. diff. linéaire d'ordre 1 homogène.

$(E_0) : y' + a(t)y = 0$ sur I avec $a \in C^0(I)$

On note A une primitive de a sur I .

Théorème :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto ke^{-A(t)} \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

- $S_{(E_0)}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Remarques :

- ❶ si f_0 est une solution non nulle de (E_0)
alors $S_{(E_0)} = \text{Vect}(f_0)$
- ❷ si f est une solution de (E_0) s'annulant sur I
alors f est la fonction nulle sur I .

1.2. Eq. diff. lin. d'ordre 2 homogène à coeff. const.

$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$ sur I
avec a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

On note $E_c : ax^2 + bx + c = 0$ (équation caractéristique)

Théorème :

- ❶ Si E_c a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \end{array} \middle| (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- ❷ si E_c a une racine réelle double r_0 , alors

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto k_1 e^{r_0 t} + k_2 t e^{r_0 t} \end{array} \middle| (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- ❸ si E_c a deux racines $\alpha + i\omega$ et $\overline{\alpha + i\omega}$, alors

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\alpha t} (k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)) \end{array} \middle| (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- $S_{(E_0)}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque

dans ❸ on peut aussi écrire les solutions :

$$t \mapsto e^{\alpha t} A \cos(\omega t + \varphi)$$

1.3. Exemples.

- $y' + ay = 0$
Les solutions sont les fonctions $t \mapsto ke^{-at}$.
(avec $k \in \mathbb{R}$)
- $y'' + \omega^2 y = 0$
Les solutions : $t \mapsto a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.
(avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)

2. Equations avec second membre

2.1. $(E) : y' + a(t)y = \varphi(t)$ sur I

On note g une solution particulière de (E) .

$$\bullet S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto h(t) + g(t) \end{array} \middle| h \in S_{(E_0)} \right\}$$

$$\bullet S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto ke^{-A(t)} + g(t) \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

2.2. $(E_0) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$ sur I
avec a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

On note g une solution particulière de (E) .

$$\bullet S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto h(t) + g(t) \end{array} \middle| h \in S_{(E_0)} \right\}$$

2.3. Avec un second membre constant

- Si $a \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto \frac{b}{a}$ est une solution de $y' + ay = b$
- Si $c \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto \frac{d}{c}$ est une solution de $ay'' + by' + cy = d$

3. Principe de superposition

- Si g_1 est solution de $y' + a(t)y = \varphi_1(t)$
et g_2 est solution de $y' + a(t)y = \varphi_2(t)$ alors
 $\alpha g_1 + \beta g_2$ est solution de $y' + a(t)y = \alpha \varphi_1(t) + \beta \varphi_2(t)$
- Si g_1 est solution de $ay'' + by' + cy = \varphi_1(t)$
et g_2 est solution de $ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$ alors
 $\alpha g_1 + \beta g_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = \alpha \varphi_1(t) + \beta \varphi_2(t)$

4. Méthode de variations de la constante

$(E) : y' + a(t)y = \varphi(t)$
avec a et φ deux fonctions continues sur I .

Théorème : (E) possède au moins une solution sur I .

Méthode de variation de la constante :

En posant $f_0(t) = \exp(-A(t))$,

on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto k(t) \times f_0(t)$

5. Condition initiale

- $(E) : y' + a(t)y = \varphi(t)$ sur I .

Théorème : Pour $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$,

il existe une unique solution f de (E) vérifiant :

$$f(t_0) = y_0$$

- $(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$

Théorème : Pour $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$,

il existe une unique solution f de (E) vérifiant :

$$f(t_0) = y_0 \text{ et } f'(t_0) = y_1$$