

Ex 1. Application directe du cours.

- 1) Résoudre les équations différentielles suivantes :
 - a. $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
 - b. $y' + \frac{1}{t}y = 0$ sur $]0; +\infty[$.
- 2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.
 - a. $y'' + 4y' + 13y = 0$.
 - b. $y'' - y = 0$
- 3) a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 2y = 3$
 b. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{t}y = 2$
- 4) a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 3$
 b. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $y'' - y = t$
- 5) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème différentiel suivant : $2y' + 2y = 3$ et $y(1) = 2$.
- 6) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème différentiel suivant : $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
- 7) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E) : y' - y = 4 + 2\cos(t) - e^t$

Ex 2. On considère l'équation $(E) : y'' - 4y = e^{2x}$

- 1) Soit P un polynôme, on note $g : x \mapsto P(x)e^{2x}$.
 - a. On suppose que g est solution, montrer que P est de degré 1.
 - b. En déduire une solution de (E)
- 2) Donner l'ensemble des solutions de (E) .

Ex 3. On considère l'équation $(E) : y'' + y = \cos(t)$

- 1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $g : x \mapsto a t \cos(t) + b t \sin(t)$.
 Déterminer un couple (a, b) pour lequel g est une solution de (E)
- 2) Donner l'ensemble des solutions de (E) .

Ex 4. On considère l'équation $(E) : y' + 5y = x^2 - x + 3$

- 1) Déterminer une solution polynomiale de (E)
- 2) Donner l'ensemble des solutions de (E) .

Ex 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E) : y' - y = 4 + 2\cos(t) - e^t$ **Ex 6.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E) : y'' + 3y' - 2y = \sin(t) + t + e^t$.**Ex 7.** 1) Résoudre sur $\mathbb{R}$, $2y' + 2y = 3$ et $y(1) = 2$.
 2) Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y'' + y = 1$, $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$.**Ex 8.** Ecrire l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes comme des espaces vectoriels engendrés.

- 1) $I = \mathbb{R}$ et $y' = -ty$.
- 2) $I = \mathbb{R}$ et $y' + 4x^2y = 0$.
- 3) $I = \mathbb{R}_+^*$ et $t y' = y$

Ex 9. 1) Résoudre sur $]0; +\infty[$, l'équation différentielle : $(E) : (1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = \frac{1}{x}$

- 2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E) : y' = x + 2xy$
- 3) Résoudre sur $]0; +\infty[$ $(E) : y' - \frac{1}{t}y = t e^t$
- 4) Résoudre sur $]0; +\infty[$ $(E) : x^3 y'(x) - x^2 y(x) = 1$

Ex 10. On note $E = C^2(\mathbb{R})$,

Dans les cas suivants montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F .

- 1) $F = \{ f \in E \mid f'' + f' + \frac{1}{4}f = 0 \}$.
- 2) $F = \{ f \in E \mid f'' + 3f' + f = 0 \}$.
- 3) $F = \{ f \in E \mid f'' + 4f' + 5f = 0 \}$.

Ex 11. (*Agro-veto MCR 2023*)

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) : y'(t) = a(t)y(t)$$

- 1) Donner, sans justification, les solutions de l'équation différentielle (E_1) .
- 2) En déduire que, si f est une solution de (E_1) s'annulant sur I , alors f est la fonction nulle sur l'intervalle I .

Soit b une fonction continue sur $\mathbb{R}$, C une constante réelle et g une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle :

$$(E_2) : y'(t) = b(y(t)) (y(t) - C).$$

- 3) Montrer que $g - C$ est solution sur I de :

$$(E_3) : y'(t) = b(g(t)) y(t)$$

- 4) En déduire que, s'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$, alors g est constante sur I .

Ex 12. (*Début du sujet ENS 2024*) Première partie : Équation de compétition entre deux populations

On considère l'équation :

$$u'(t) = u(t) (r_1 - u(t))$$

avec $r_1 > 0$ et une donnée initiale strictement positive $u(0) > 0$.

On admettra qu'il existe une solution $u(t)$ pour tout $t \geq 0$, de classe $\mathcal{C}^1$.

(très mal dit : il existe sur $[0; +\infty[$ une solution u de classe $\mathcal{C}^1$)

- 1) Trouver l'équation satisfaite par la fonction $p := 1/u$ et résoudre cette équation.
- 2) En déduire que

$$u(t) = \frac{u(0)r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)(1 - e^{-r_1 t})}$$

- 3) En déduire la limite de u quand $t \rightarrow +\infty$.

Ex 13. 1) Résoudre sur $]0; +\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) : y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right)y = 1$$

- 2) Déterminer la solution de (E) sur $]0; +\infty[$ vérifiant : $y(1) = -\frac{1}{2}$.
- 3) Déterminer la solution de (E) sur $]0; +\infty[$ vérifiant : $y(1) = \frac{1}{2}$.
- 4) Résoudre sur $]0; +\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E_2) : y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right)y = 1 + e^{(t^2)}$$

Ex 14. On note F l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

- 1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $D_2(\mathbb{R}_+^*)$.
- 2) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $x > 0$, $z(x) = xy(x)$.
Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle (E') à coefficients constants que l'on déterminera.
- 3) En déduire que F est de dimension finie et déterminer une base de F .