

Interrogation 6 (25 minutes)

La calculatrice n'est pas autorisée.

On rappelle que vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous voulez, en revanche dans chaque exercice vous devez faire les questions dans l'ordre.

Les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles, certaines questions (comme 1) ou 9) demandent une bonne maîtrise du calcul fractionnaire sans calculatrice, l'évaluation de la copie tiendra compte de cette maîtrise.

- 1) Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	1	2	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Calculer l'espérance de X et sa variance.

- 2) On lance 3 fois un dé classique et on note X le nombre de 6 et Y le numéro obtenu au troisième lancer.

- Quelle est la loi de X ? son espérance ?
- Quelle est la loi de Y ? son espérance ?

- 3) Un coach de Basket a une équipe de 12 joueurs dont Melvin et Erwan.

Le coach décide de désigner au hasard le cinq de départ (Les cinq joueurs qui vont commencer le match).
On note M : "Melvin est dans le cinq de départ" et E : "Erwan est dans le cinq de départ"

- Quelle est la probabilité que Melvin fasse partie du cinq de départ ?
- Quelle est la probabilité que Melvin et Erwan fassent partie du cinq de départ ?
- Les événements M et E sont-ils indépendants ?

- 4) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{3}\right)$

- Que valent $P(X = 0)$ et $P(X = 3)$?
- Quelle est l'espérance de X ? la variance de X ?

- 5) On lance 10 fois une pièce équilibrée, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile et 0 sinon.

- Quelle est la loi de probabilité des variables aléatoires X_i ?

- Interpréter la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ et donner sa loi de probabilité de X ?

- 6) Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = [1, n]$. Démontrer que $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$

- 7) Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

On note F sa fonction de répartition.

- Que valent $F(0)$, $F(3)$ et les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$?
- Faire la représentation graphique de F .

- 8) On prend simultanément 5 boules dans une urne contenant 13 boules rouges, 13 boules vertes, 13 boules bleues et 13 boules jaunes. et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
- Que valent $P(X = 0)$ et $P(X = 5)$? (On ne cherchera pas à simplifier les résultats dans cette question)
- (Bonus) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- (Bonus) Quelle est l'espérance de X ?

- 9) Une urne contient 4 dés truqués et 8 normaux. Les dés truqués donnent tous 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

On tire un dé dans l'urne, on le lance 12 fois et on note X le nombre de 1 obtenu.

- Sachant que le dé tiré est truqué, quelle est la loi de X ?
- Sachant que le dé tiré est normal, quelle est la loi de X ?
- Donner, si vous pouvez et sans justification, l'espérance de X .
- Démontrer le résultat précédent.