Correction de l'interrogation 6

1) $E(X) = 1 \times \dfrac{5}{12} + 2 \times \dfrac{1}{4} + 4 \times \dfrac{1}{12} + 5\dfrac{1}{4} = \dfrac{30}{12}$ donc $\boxed{E(X) = \dfrac{5}{2}}$

Th. de transfert : $E(X^2) = 1^2 \times \dfrac{5}{12} + 2^2 \times \dfrac{1}{4} + 4^2 \times \dfrac{1}{12} + 5^2\dfrac{1}{4} = \dfrac{108}{12}$ donc $E(X^2) = 9$

La formule de Kœnig-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ donne $\boxed{V(X) = \dfrac{11}{4}}$

2) a) Cette expérience est constituée de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succés : "obtenir 6" de probabilité $\dfrac{1}{6}$) et X représente alors le nombre de succès donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3; \dfrac{1}{6}\right)}$ et $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{2}}$

b) Le troisième lancer est une lancer indépendant d'un dé donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\llbracket 1, 6 \rrbracket\right)}$ et $\boxed{E(Y) = \dfrac{1+6}{2} = \dfrac{7}{2}}$

3) On modélise cette expérience usuelle par Ω : l'ensemble des combinaisons de 5 éléments de $\llbracket 1, 12 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme.

a) $P(M) = \dfrac{\dbinom{11}{4}}{\dbinom{12}{5}}$ donc $\boxed{P(M) = \dfrac{5}{12}}$

b) $P(M \cap E) = \dfrac{\dbinom{10}{3}}{\dbinom{12}{5}}$ donc $\boxed{P(M \cap E) = \dfrac{5 \times 4}{12 \times 11} = \dfrac{5}{33}}$

c) $P(E) = \dfrac{5}{12}$ donc $P(M) \times P(E) = \dfrac{5^2}{12^2} \neq \dfrac{5}{33} = P(M \cap E)$ donc $\boxed{M \text{ et } E \text{ ne sont pas indépendants}}$

4) a) $P(X = 0) = \dbinom{5}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$ donc $\boxed{P(X = 0) = \dfrac{32}{243}}$

$P(X = 3) = \dbinom{5}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ donc $\boxed{P(X = 3) = \dfrac{40}{243}}$

b) $\boxed{E(X) = \dfrac{5}{3}}$ et $\boxed{V(X) = \dfrac{10}{9}}$

5) a) Obtenir pile au $i$ème lancer a pour probabilité $\dfrac{1}{2}$ donc $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

b) $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{10} X_i$ compte le nombre de X_i donnant 1 donc $\boxed{X \text{ est le nombre de piles obtenus}}$

X est la somme de 10 variables de Bernoulli identiques et indépendantes donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \dfrac{1}{2}\right)$

6)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} P(X = j) && \text{car } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} P(X = j) && \textit{inversion d'une somme triangulaire} \\
&= \sum_{j=1}^{n} jP(X = j) \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)}$$

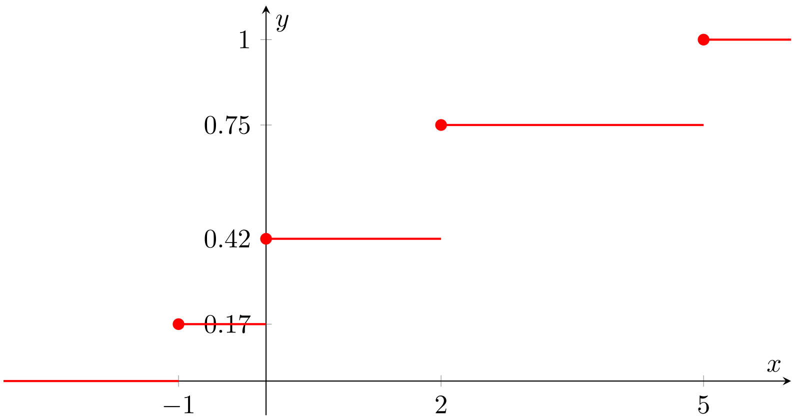
7) a) $X(\Omega) = \{-1, 0, 2, 5\}$ donc

$F(0) = P(X=-1) + P(X=0) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}$ et $F(3) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=2) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}$

$$\boxed{F(0) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad F(3) = \frac{3}{4}}$$

et les propriétés communes à toutes les fonctions de répartitions donnent $\boxed{\lim_{-\infty} F = 0 \ \text{ et } \ \lim_{+\infty} F = 1}$

b) Représentation de F :



8) On modélise cette expérience usuelle par Ω : l'ensemble des combinaisons de 5 éléments de $[\![1, 52]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

a) $X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$

b) $\boxed{P(X=0) = \dfrac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}}$ et $\boxed{P(X=5) = \dfrac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}}$

c) Pour $k \in [\![0, 5]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{\binom{13}{k}\binom{39}{5-k}}{\binom{52}{5}}$

d) *(Plus difficile, il faut se rappeler de ce que nous avons fait en classe)* $\boxed{E(X) = \dfrac{5}{4}}$

9) On note T : le dé est truqué.

a) Sachant que le dé tiré est truqué,

on se retrouve dans un schéma de Bernoulli (Succés : "obtenir ❶ " de proba. $\dfrac{1}{2}$) donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(12, \frac{1}{2}\right) \ (\text{Sachant } T)}$$

b) Sachant que le dé tiré est normal,

on se retrouve dans un schéma de Bernoulli (Succés : "obtenir ❶ " de proba. $\dfrac{1}{6}$) donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(12, \frac{1}{6}\right) \ (\text{Sachant } \overline{T})}$$

c) *(Au tableau)*

d)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{12} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{12} k\Big(P(T)P_T(X=k) + P(\overline{T})P_{\overline{T}}(X=k)\Big) \\
&= P(T)\sum_{k=0}^{12} kP_T(X=k) + P(\overline{T})\sum_{k=0}^{12} kP_{\overline{T}}(X=k) \\
&= \frac{1}{3} \times 12 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times 12 \times \frac{1}{6}
\end{aligned}
\qquad \boxed{E(X) = \frac{10}{3}}$$