Feuille 10 : Simulation d'une expérience aléatoire.

Questions préliminaires.

1. Comment permuter deux valeurs d'une liste ?
2. Comment supprimer une valeur d'une liste ?
3. **Exercice.**
   (a) Ecrire une fonction `supprime_doublons(L)` qui prend la liste `L` en entrée et qui renvoie une nouvelle liste où chaque élément de L n'apparait qu'une fois dans la liste.
   (b) Ecrire une fonction `supprime(L , a)` qui supprime toutes les occurrences de `a` dans la liste `L`.
   (c) Écrire une fonction `minimum_en_position(L, k)` qui :
      i. Recherche l'indice du plus petit élément dans la sous-liste de `L[k:]`.
      ii. Permute cet élément avec l'élément situé à la position `k` dans la liste.

   Exemple : Soit `L = [5, 3, 8, 1, 4]`.
   Après l'appel de `minimum_en_position(L, 0)`, la liste devient : `[1, 3, 8, 5, 4]`

Partie I. Fonctions Python aléatoires.

```
import random as rd
```

Rappeler la spécifications des fonctions suivantes

`rd.random()`   `rd.randint(a, b)`   `rd.randrange(n)`

`rd.choice(L)`   `rd.shuffle(L)`   `rd.sample(L, n)`

1. Ecrire une fonction qui simule le lancer d'un dé équilibré.
2. Ecrire une fonction qui simule le lancer d'une pièce donnant pile avec une probabilité p.
3. Ecrire une fonction `tirage_avec_remise(urne, n)` qui renvoie une liste de `n` tirages successifs aléatoires (avec remise) dans la liste `urne`.
4. Ecrire une fonction `tirage_sans_remise(urne, n)` qui renvoie une liste de `n` tirages successifs aléatoires (sans remise) dans la liste `urne`.
5. Ecrire une fonction `tirage_jusque(urne, a)` qui répète des tirages aléatoires (avec remise) dans la liste `urne` jusqu'à ce que `a` soit obtenu, et renvoie la liste des tirages.

Partie II. Estimer des probabilité, des espérances.

Loi des grands nombres.

Lorsqu'on observe une expérience aléatoire un grand nombre de fois,
- les fréquences de réalisation des événements tendent vers leur probabilité.
- la moyenne des variables aléatoires tendent vers leur espérance.

Une série d'un grand nombre de simulations permet d'estimer des probabilités et des espérances.

Dans les exercices de maths suivants estimer les réponses par des simulations, les plus courageux pourront vérifier la cohérence des résultats par la résolution de l'exercice.

1. Une urne contient 5 boules rouges et 10 boules vertes on fait deux tirages avec remise dans l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
2. On lance dix fois un dé. On note X le nombre de ❻ obtenu. Quelle est l'espérance de X ?
3. Une urne contient 5 boules rouges et 10 boules vertes on fait trois tirages sans remise dans l'urne.
   Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit rouge ?
4. Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire les 20 jetons sans remise dans l'urne et on note X le rang d'apparition du premier jeton portant un numéro pair. Quelle est l'espérance de X ?

5. On lance un dé indéfiniment et on note A : "avant le premier 6 il n'y a que des nombres pairs".
   Quelle est la probabilité de A ?

6. Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire les 20 jetons sans remise dans l'urne et on note X le rang d'apparition du premier jeton portant un numéro pair.
   Quelle est l'espérance de X ?

7. On tire simultanément cinq cartes dans un jeu de 32.
   Donner une valeur approchée de la probabilité des événements suivants.
   (a) A :« On obtient un full aux as ».
   (b) B :« On obtient un brelan ».
   (c) C :« On obtient deux paires ».

8. Une urne contient sept boules vertes et cinq boules rouges. On effectue successivement quatre tirages dans cette urne en suivant la règle suivante :
   Si on obtient une boule verte, on la remet dans l'urne,
   Si on obtient une boule rouge, on remet deux boules rouges dans l'urne.
   On peut remarquer que le nombre de boules vertes est constant alors que le nombre de boules rouges croit.
   Donner une valeur approchée de la probabilité des événements suivants.
   (a) A :« On obtient que des rouges »
   (b) B :« On obtient que des vertes »
   (c) C :« On obtient plus de boules rouges que de vertes »

Partie III. Des exemples sortis du concours.

1. (a) Écrire une fonction Python qui simule une série de N lancers d'une pièce équilibrée, et qui renvoie la liste des résultats de ces lancers ("Pile" est codé par 1, et "Face" par 0).
   (b) Écrire une fonction Python qui simule une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de la configuration "Pile, Pile, Face", et qui renvoie le nombre de lancers nécessaires à l'apparition de cette configuration. À l'aide de cette fonction, évaluer le temps moyen d'attente de cette configuration.

2. (a) Écrire en Python une fonction `alea(k)` qui prend en argument un entier positif k et renvoie 1 avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ et 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.
   (b) Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe selon les règles suivantes :
   - À l'instant $n = 0$, le mobile est au point d'abscisse 0 .
   - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le mobile est au point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il est au point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ et au point d'abscisse 0 avec probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.

   On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n.
   i. Écrire une fonction `simulX(n)` qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$, qui simule n déplacements du mobile et renvoie la valeur de X_n.
   ii. Écrire une fonction `attend()` qui ne prend pas d'argument en entrée, qui simule les déplacements du mobile jusqu'au premier retour au point d'abscisse 0, et renvoie le plus petit n strictement positif pour lequel $X_n = 0$.

3. Écrire une fonction python, d'arguments d'entrée i et N, qui simule une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: le marcheur démarre sur l'entier i et à chaque pas, il avance de 1 ou recule de 1 avec probabilité 1/2.
   La marche s'arrête après le N-ième pas et la fonction renvoie l'entier sur lequel le marcheur s'est arrêté.