

Correction de la feuille Act.12 : Equations différentielles linéaires.

Ex 1. Application directe du cours.

- 1) a. $(E_0) : y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 et homogène, donc

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-2t} & k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

- b. $(E_0) : y' + \frac{1}{t}y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et homogène,

La fonction $a : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et $A : t \mapsto \ln(t)$ est une primitive de a sur $]0; +\infty[$,

de plus $\exp(-A(t)) = \exp(-\ln(t)) = \frac{1}{t}$ donc

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{c|c}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{k}{t} & k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

- 2) a. $(E_0) : y'' + 4y' + 13y = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 et homogène, le polynôme caractéristique $P = X^2 + 4X + 13$ a pour racines $-2 + 3i$ et $-2 - 3i$ donc

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{-2t}(k_1 \cos(3t) + k_2 \sin(3t)) & (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

- b. $(E_0) : y'' - y = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 et homogène, Le polynôme caractéristique $P = X^2 - 1$ a pour racines -1 et 1 donc

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 e^{-t} + k_2 e^t & (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

- 3) a. $(E_0) : y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 et homogène, donc $S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-2t} & k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

de plus on remarque que $t \mapsto \frac{3}{2}$ est une solution de $(E) : y' + 2y = 3$ donc

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-2t} + \frac{3}{2} & k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

- b. $(E_0) : y' + \frac{1}{t}y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et homogène,

La fonction $a : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $I =]0; +\infty[$ et $A : t \mapsto \ln(t)$ est une primitive de a sur $]0; +\infty[$,

de plus $\exp(-A(t)) = \exp(-\ln(t)) = \frac{1}{t}$ donc $S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{c|c}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{k}{t} & k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Méthode de variations de la constante.

On note $f_0 : t \mapsto \frac{1}{t}$ (attention ici on a $a = f_0$, cela peut vous embrouiller)

Soit k une fonction dérivable sur I , on note $g : t \mapsto k(t)f_0(t)$

$$\begin{aligned} g \in S_{(E)} &\iff g' + ag = 2 && (\text{sur } I) \\ &\iff k'f_0 + kf'_0 + akf_0 = 2 \\ &\iff k'f_0 = 2 \\ &\iff \forall t \in I, k'(t) = 2t \end{aligned}$$

En prenant (par exemple) $k : t \mapsto t^2$ on obtient $g : t \mapsto t^2 f_0(t) = t$

La fonction $t \mapsto t$ est une solution de $(E) : y' + \frac{1}{t} y = 2$

En conclusion :

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{k}{t} + t & k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

- 4) a. A. Soit P un polynôme, on note $g : x \mapsto P(x)e^{2x}$ et on suppose que g solution de (E) ,
donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) - 4g(x) = e^{2x}$
or $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (P'(x) + 2P(x))e^{2x}, \quad g''(x) = \dots = (P''(x) + 4P'(x) + 4P(x))e^{2x}$
or $g''(x) - 4g(x) = (P''(x) + 4P'(x) + 4P(x))e^{2x} - 4P(x)e^{2x} = (P''(x) + 4P'(x))e^{2x}$
et comme $e^{2x} \neq 0$ il vient $P''(x) + 4P'(x) = 1$ donc $\deg(P') = 0$ (car $P \neq 0$ et $\deg(P'') < \deg(P')$)
et donc $\deg(P) = 1$

si g est solution de (E) alors P est de degré 1

- B. Soit $P = a + bX \in \mathbb{R}_1[X]$, on note $g : x \mapsto P(x)e^{2x}$
 g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (2a + b + 2bx)e^{2x}, \quad g''(x) = (4a + 4b + 4bx)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} g \in S_{(E)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) - 4g(x) = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4a + 4b + 4bx)e^{2x} - 4(a + bx)e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4b)e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff \quad 4b = 1 \quad (\text{car } e^{2x} \neq 0) \end{aligned}$$

On en déduit qu'il suffit de prendre $b = \frac{1}{4}$ pour obtenir une solution

La fonction $x \mapsto \frac{1}{4} x e^x$ une solution de (E)

Remarque : On peut rédiger dans un autre contexte (pour remplacer a. et b.) :

Soit P un polynôme, on note $g : x \mapsto P(x)e^{2x}$,

g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (P'(x) + 2P(x))e^{2x}, \quad g''(x) = \dots = (P''(x) + 4P'(x) + 2P(x))e^{2x}$$

$$\begin{aligned} g \in S_{(E)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) - 4g(x) = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (P''(x) + 4P'(x) + 4P(x))e^{2x} - 4P(x)e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (P''(x) + 4P'(x))e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad P''(x) + 4P'(x) = 1 \quad (\text{car } e^{2x} \neq 0) \end{aligned}$$

On remarque qu'il suffit de prendre $P(x) = \frac{1}{4} x$ pour que g soit solution de (E) .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{4} x e^x$ une solution de (E)

- b. $P = X^2 - 4$ est le polynôme caractéristique de $(E_0) : y'' - 4y = 0$.

P a deux racines réelles distinctes : 2 et -2 donc l'ensemble des solutions de (E_0) est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k_1 e^{2x} + k_2 e^{-2x} & (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

et comme d'après 1), $x \mapsto \frac{1}{4} x e^x$ une solution de (E) , l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k_1 e^{2x} + k_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^x & (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

5) (*Rapidement*)

a. ... $g : t \mapsto \frac{1}{2}t \sin(t)$ est une solution de (E)

b. L'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t) + \frac{1}{2}t \sin(t) \end{array} \middle| (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

6) (*non corrigé*)

7) (*non corrigé*)

Ex 2. (*non corrigé*)

Ex 3. (*non corrigé*)

Ex 4. (*non corrigé*)

Ex 5. (*non corrigé*)

Ex 6. (*non corrigé*)

Ex 7. (*non corrigé*)

Ex 8. (*non corrigé*)

Ex 9. (*non corrigé*)

Ex 10. (*non corrigé*)

Ex 11. 1) En notant A une primitive de la fonction a sur l'intervalle I , (A existe car a est continue sur I)
L'ensemble des solutions de (E_1) est

$$S_{(E_1)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto c e^{A(t)} \end{array} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Soit f une solution de (E_1) s'annulant en $t_0 \in I$,

il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I, f(t) = c e^{A(t)}$ et sachant que $f(t_0) = 0$ il vient $c e^{A(t_0)} = 0$,
donc finalement comme $e^{A(t_0)} \neq 0$ on a nécessairement $c = 0$ ce qui entraîne que f est nulle.

On a bien montré que :

Si f est une solution de (E_1) qui s'annule sur I alors f est la fonction nulle sur I

3) On note $f = g - C$, f est dérivable et pour $t \in I$

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(t) \\ &= b(g(t)) (g(t) - C) \\ &= b(g(t)) f(t) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$g - C \text{ est solution de } (E_3) : y'(t) = b(g(t)) y(t)$$

4) On vient de montrer que $g - C$ est solution d'une équation de la forme : $y'(t) = a(t)y(t)$ avec a une fonction continue sur I .

donc (d'après 2)) si $g - C$ s'annule sur I alors elle est nulle sur I ,

S'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$, alors g est constante sur I

Ex 12. 1) On peut commencer par remarquer que u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.

En effet : u est solution d'une équation de la forme $y' = a(t)y$ donc $\exists k \in \mathbb{R} : u : t \mapsto k e^{\left(\int_0^t a(s) ds\right)}$
et on sait que $u(0) > 0$ ce qui entraîne $k > 0$ et ainsi $\forall t \in \mathbb{R}^+, u(t) > 0$

u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc $p = \frac{1}{u}$ l'est aussi et $p' = -\frac{u'}{u^2}$

on a $u' = u(r_1 - u)$ donc $-\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}(r_1 - u)$ ou encore $p' = -r_1 p + 1$

On reconnaît une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto k e^{-r_1 t} + \frac{1}{r_1}$, sachant de plus que $p(0) = \frac{1}{u(0)}$, il vient :

$$p(t) = \left(\frac{1}{u(0)} - \frac{1}{r_1} \right) e^{-r_1 t} + \frac{1}{r_1}$$

2) la relation précédente et $u = \frac{1}{p}$ donne : $u(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{u(0)} - \frac{1}{r_1}\right) e^{-r_1 t} + \frac{1}{r_1}}$ ou encore :

$$u(t) = \frac{u(0)r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)(1 - e^{-r_1 t})}.$$

3) $r_1 > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-r_1 t} = 0$ et ainsi : $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = r_1$

Ex 13. 1) • Sur $]0; +\infty[$, $(E_0) : y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right)y = 0 \iff y'(t) + a(t)y(t) = 0$ avec $a(t) = -\left(2t - \frac{1}{t}\right)$.

la fonction a est continue sur $]0; +\infty[$.

En prenant $A : t \mapsto -t^2 + \ln(t)$ comme primitive de a sur $]0; +\infty[$ on a :

$$\exp(-A(t)) = \exp(t^2 - \ln(t)) = \exp(t^2) \exp(-\ln(t)) = \frac{e^{(t^2)}}{t}$$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions $t \mapsto k \frac{e^{(t^2)}}{t}$ (où k est une constante réelle)

• (Méthode de variation de la constante :)

(Je vous montre plusieurs présentations, n'hésitez pas à me montrer la votre).

Présentation 1 :

Soit k une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$, on note : $g : t \mapsto k(t) \frac{e^{(t^2)}}{t}$ ou encore $k(t)f_0(t)$

$$\begin{aligned} g \in S_E &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad g'(t) + a(t)g(t) = 1 \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad \left(k'(t)f_0(t) + k(t)f_0'(t)\right) + a(t)k(t)f_0(t) = 1 \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t)f_0(t) + k(t)\left(f_0'(t) + a(t)f_0(t)\right) = 1 \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t)f_0(t) = 1 \quad (\text{car } f_0 \text{ solution de } (E_0)) \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) = te^{(-t^2)} \end{aligned}$$

En prenant $k : t \mapsto -\frac{1}{2} e^{(-t^2)}$ on obtient que $g : t \mapsto -\frac{1}{2t}$ est une solution de (E) .

Présentation 2 :

Soit k une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$, on note : $g : t \mapsto k(t) \frac{e^{(t^2)}}{t}$ ou encore $k(t)f_0(t)$

$$\begin{aligned} g \in S_E &\iff g' + ag = 1 \\ &\iff k'f_0 + kf_0' + akf_0 = 1 \\ &\iff k'f_0 = 1 \quad (\text{car } f_0 \text{ solution de } (E_0)) \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) = te^{(-t^2)} \end{aligned}$$

En prenant $k : t \mapsto -\frac{1}{2} e^{(-t^2)}$ on obtient que $g : t \mapsto -\frac{1}{2t}$ est une solution de (E) .

Présentation 3 :

Soit k une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$, on note : $g : t \mapsto k(t) \exp(-A(t))$

$$\begin{aligned} g \in S_E &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad g'(t) + a(t)g(t) = 1 \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad \left(k'(t) \exp(-A(t)) - a(t)k(t) \exp(-A(t))\right) + a(t)k(t) \exp(-A(t)) = 1 \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) \exp(-A(t)) = 1 \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) = \exp(A(t)) \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) = te^{(-t^2)} \end{aligned}$$

En prenant $k : t \mapsto -\frac{1}{2} e^{(-t^2)}$ on obtient que $g : t \mapsto -\frac{1}{2t}$ est une solution de (E) .

Présentation 4 :

Soit k une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$, on note : $g : t \mapsto k(t) \exp(t^2 - \ln(t))$

$$\begin{aligned} g \in S_E &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad g'(t) - \left(2t - \frac{1}{t}\right) g(t) = 1 \\ &\iff k'(t) \exp(t^2 - \ln(t)) + \left(2t - \frac{1}{t}\right) k(t) \exp(t^2 - \ln(t)) - \left(2t - \frac{1}{t}\right) k(t) \exp(t^2 - \ln(t)) = 1 \\ &\iff k'(t) \exp(t^2 - \ln(t)) = 1 \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) = t e^{(-t^2)} \end{aligned}$$

En prenant $k : t \mapsto -\frac{1}{2} e^{(-t^2)}$ on obtient que $g : t \mapsto -\frac{1}{2t}$ est une solution de (E) .

On peut alors conclure :

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -\frac{1}{2t} + k \frac{e^{(t^2)}}{t} \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Soit $f : t \mapsto -\frac{1}{2t} + k \frac{e^{(t^2)}}{t}$ une solution de (E) ,

$$\begin{aligned} f(1) = -\frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{2} + k \times \frac{e}{1} = -\frac{1}{2} \\ &\iff k = 0 \end{aligned}$$

$$\text{La solution vérifiant } y(1) = -\frac{1}{2} \text{ est la fonction } t \mapsto -\frac{1}{2t}$$

3) Soit $f : t \mapsto -\frac{1}{2t} + k \frac{e^{(t^2)}}{t}$ une solution de (E) ,

$$\begin{aligned} f(1) = \frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{2} + k \times \frac{e}{1} = \frac{1}{2} \\ &\iff k = e^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{La solution vérifiant } y(1) = \frac{1}{2} \text{ est la fonction } x \mapsto -\frac{1}{2t} + \frac{e^{(t^2-1)}}{t}$$

4) Cherchons une solution de l'équation $(E_3) : y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right) y = e^{(t^2)}$ comme à la question 1).

Pour k une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$, on note : $g : x \mapsto k(t) f_0(t)$

$$\begin{aligned} g \text{ solution} &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) f_0(x) = e^{(t^2)} \\ &\iff \forall t \in]0; +\infty[, \quad k'(t) = t \end{aligned}$$

En prenant $k : t \mapsto \frac{t^2}{2}$ on obtient que $g : t \mapsto \frac{1}{2} t e^{(t^2)}$ est une solution de (E_3) .

En conclusion :

$$S_{(E_2)} = \left\{ \begin{array}{l}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2} t e^{(t^2)} + k \frac{e^{(t^2)}}{t} \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

Ex 14. (non corrigé)