

Définition Une variable aléatoire discrète.

Ex 1. Donner des exemples de variable aléatoire discrète.

Proposition Une variable aléatoire discrète bien définie par sa loi.

Ex 2. Dans les cas suivants vérifier si la variable aléatoire X est bien définie.

- 1) $X(\Omega) = \{-1, 0, 2, 3\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 3) = \frac{1}{6}$
- 2) Pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, $X(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P\left(X = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$
- 3) Pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, $X(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P\left(X = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$
- 4) $X(\Omega) = \{(-1)^{n+1}n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $P([X = (-1)^{n+1}n]) = \frac{1}{2^{n+1}}$
- 5) $X(\Omega) = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(X = \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{n}{2^n}$
- 6) (*) $X(\Omega) = \{(n-2)^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $P([X = (n-2)^2]) = \frac{1}{e n!}$

Proposition Une variable aléatoire discrète bien définie avec une expérience aléatoire.

Ex 3. Dans chacun des cas suivants dire si X peut être modélisée par une variable aléatoire discrète.

En pratique on dira : " X est bien définie".

- 1) On lance un dé 100 fois et on note X la valeur minimale des numéros.
- 2) On lance un dé 100 fois et on note X le rang du premier 6.
- 3) On lance un dé indéfiniment et on note X le rang du premier 6.
- 4) (*) On lance un dé indéfiniment et on note X le nombre de 6 obtenu.

Indication : On montrera que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = 0$, en utilisant $A_{n,k}$: "le dernier 6 est en n et jusqu'à n (compris) il y a exactement k 6"

Définition *Espérance d'une variable aléatoire discrète.*

$X(\Omega)$ fini :

$X(\Omega)$ dénombrable :

Ex 4. Dans les cas suivants où X est une variable aléatoire bien définie, calculer son espérance si elle existe.

- 1) $X(\Omega) = \{-1, 0, 2, 3\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 3) = \frac{1}{6}$
- 2) Pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, $X(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P\left(X = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$
- 3) $X(\Omega) = \{(-1)^{n+1}(n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $P([X = (-1)^{n+1}(n+2)]) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
- 4) $X(\Omega) = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(X = \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{n}{2^{n+1}}$

Ex 5. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (avec $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$),
Montrer que : si X est bornée alors X admet une espérance.

Théorème *Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète.*

$X(\Omega)$ fini :

$X(\Omega)$ dénombrable :

Ex 6. 1) Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calculer $E(X^2)$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer $E\left(\frac{1}{X(X+1)}\right)$.

3) Soit X une variable aléatoire de loi : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{3}{4^{k+1}}$.

Calculer, si elle existe, l'espérance de $X(1 - X)$.

4) Soit X une variable aléatoire de loi : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$.

Calculer, si elle existe, l'espérance de $(-1)^X X$.