

Ex 1 : Dans une certaine communauté, chaque couple suit la règle suivante :

« Ayez des enfants jusqu'à la naissance du premier garçon, puis cessez définitivement de procréer. »

On suppose que : - chaque naissance est indépendante des autres ;

- la probabilité d'avoir une fille ou un garçon vaut $\frac{1}{2}$.

On note N le nombre total d'enfants d'un couple.

- 1) Sans faire de calcul, que pensez-vous que cette règle implique sur la proportion de garçons et de filles dans la population ? Expliquez votre intuition en une phrase.
- 2) Donner la loi de N . (*On introduira pour $k \geq 1$ l'événement F_k : « le k -ième enfant est une fille ».*)
- 3) Vérifier que la somme des $P(N = n)$ est bien égale à 1.
- 4) Calculer le nombre moyen d'enfants par famille, c'est-à-dire l'espérance de N .
- 5) En déduire le nombre moyen de filles et de garçons par famille.
Que peut-on en conclure sur la proportion de filles et de garçons dans l'ensemble de la population ?
- 6) Quelles sont, selon vous, les limites et les faiblesses de ce modèle si l'on veut décrire une situation réelle (*biologie, comportement des familles, hypothèses simplificatrices, etc.*) ?

Ex 2 : Une urne contient une boule noire et une boule blanche. A chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule noire. On note X le rang de la première boule noire tirée.

- 1) Déterminer $X(\Omega)$.
- 2) Calculer pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.
- 3) Montrer qu'il est quasi-impossible de ne jamais tirer de boule noire.
(*Remarque : X est alors une variable aléatoire bien définie*)
- 4) X admet-elle une espérance ? et si oui, la calculer.

Ex 3 : Une pièce donne Pile avec la probabilité égale à p .

On lance plusieurs fois cette pièce jusqu'à l'obtention du second Pile et on note X_1 le nombre de Face obtenus avant le second Pile et X_2 le nombre de Face obtenus entre les deux premiers piles.

- 1) Montrer qu'il est quasi-impossible de ne jamais obtenir de second pile. (*X est ainsi correctement définie*)
- 2) Déterminer la loi de X_1 .
- 3) Calculer $E(X_1)$ l'espérance mathématique de X_1 .
- 4) Déterminer la loi de X_2 .
- 5) Calculer $E(X_2)$ l'espérance mathématique de X_2 .

Ex 4 : Un sac contient 9 jetons numérotés : 3 trois jetons avec le numéro ①, trois avec ② et trois avec ③.

On tire successivement et au hasard un jeton dans le sac.

On note X le numéro du tirage où on a vu les trois numéros pour la première fois.

Autrement dit : X est le temps d'attente pour avoir la collection des trois numéros.

1) **Les tirages se font sans remise.**

- a. Ecrire un programme Python permettant d'estimer la valeur moyenne prise par X au cours d'une grande série de simulations. (*On donnera le résultat afficher par l'ordinateur*)
- b. Déterminer la loi de X .
- c. Calculer l'espérance de X . (*Vérifier la cohérence avec le résultat de la question 1)a*)

2) **Les tirages se font avec remise.**

- a. Ecrire un programme Python permettant d'estimer la valeur moyenne prise par X au cours d'une grande série de simulations. (*On donnera le résultat afficher par l'ordinateur*)
- b. Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X .
- c. Montrer que : $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}$ et en déduire que la variable aléatoire X est bien définie.
- d. Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$.

(*Vérifier la cohérence avec les résultats de la question 2) a*)

Pour les simulations on utilisera le module **random** avec l'alias **rd** et on fera $N = 10000$ simulations.

En écrira au début de chaque série de simulations la commande **rd.seed(2026)** pour initialiser la génération des nombres pseudo-aléatoires.