

## Feuille\_Cours\_5-2 : Variables aléatoires discrètes. Variance.

**Ex 1 :** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $X^2$  admet une espérance.

- 1) Question préliminaire : montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| \leq 1 + x^2$ .
- 2) En déduire que :  $X$  possède une espérance.

**Ex 2 :** 1) Soit  $X$  la variable aléatoire de loi de probabilité :

|            |               |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x$        | -2            | -1            | 0             | 1             |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

Calculer  $V(X)$ .

- 2) Soit  $X$  une variable de Bernoulli de paramètre  $p$ .

On rappelle que  $E(X) = p$ , déterminer la variance de  $X$ .

- 3) a. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 0; n \rrbracket$ .

On rappelle que  $E(X) = \frac{n}{2}$ , Montrer que :  $V(X) = \frac{n^2 + 2n}{12}$

- b. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\llbracket a; b \rrbracket$  (où  $a$  et  $b$  sont deux entiers vérifiant  $a \leq b$ ).

Montrer que  $V(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12}$

- 4) Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ .

On rappelle que  $E(X) = np$ , Montrer que  $V(X) = np(1-p)$ .

- 5) Soit  $p \in ]0, 1[$ , on note  $q = 1 - p$  et soit  $X$  une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*; P(X = k) = pq^{k-1}.$$

- a. Montrer que  $X$  est correctement définie.
- b. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
- c. Montrer que  $X$  admet une variance et la calculer.

- 6) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et soit  $X$  une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}; P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

- a. Montrer que  $X$  est correctement définie.
- b. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
- c. Montrer que  $X$  admet une variance et la calculer.

**Ex 3 :** Dans les cas suivants, calculer sa variance si elle existe.

$$1) X(\Omega) = \{(-1)^{n+1}n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P([X = (-1)^{n+1}n]) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$2) X(\Omega) = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\left[X = \frac{(-1)^n}{n}\right]\right) = \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$3) X(\Omega) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X = 2n]) = \frac{2}{3^n}.$$

$$4) X(\Omega) = \{(-1)^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P([X = (-1)^n 2^n]) = \frac{2^n e^{-2}}{n!}$$

$$5) X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P([X = n]) = \frac{1}{e n!}$$