

## DEVOIR SURVEILLÉ

## MATHÉMATIQUES

samedi 22 novembre 2025

(2 heures)

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les conclusions.*

**La calculatrice n'est pas autorisée.**

*Le sujet comporte 4 pages, dont une donnant des rappels sur les développements limités.*

*Ce devoir comprend deux exercices et un problème, qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Toutefois, pour chacun deux, les réponses doivent être présentées dans l'ordre des questions.*

**Exercice 1.**

Une compagnie aérienne dispose d'une flotte constituée de deux types d'avions : des trimoteurs (un moteur situé en queue d'avion et un moteur sous chaque aile) et des quadrimoteurs (deux moteurs sous chaque aile).

Tous les moteurs de ces avions sont susceptibles, durant chaque vol, de tomber en panne avec la même probabilité  $x \in ]0, 1[$  et indépendamment les uns des autres. Toutefois, les trimoteurs peuvent achever leur vol si le moteur situé en queue ou les deux moteurs d'ailes sont en état de marche et les quadrimoteurs le peuvent si au moins deux moteurs situés sous deux ailes distinctes sont en état de marche.

- 1) On note  $X_3$  (respectivement  $X_4$ ) la variable aléatoire correspondant au nombre de moteurs en panne sur un trimoteur (respectivement un quadrimoteur) durant un vol.

a) Déterminer les lois de  $X_3$  et  $X_4$  puis en donner l'espérance.

b) Calculer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en panne.

*Autrement dit la probabilité de  $\left(X_3 < \frac{3}{2}\right)$*

c) Même question pour le quadrimoteur.

- 2) a) On note  $T$  l'événement «le trimoteur achève son vol». Démontrer que :

$$P(T) = (1 - x)(-x^2 + x + 1)$$

b) On note  $Q$  l'événement «le quadrimoteur achève son vol». Démontrer que :

$$P(Q) = (1 - x)^2(1 + x)^2$$

- 3) Déterminer, des quadrimoteurs ou des trimoteurs, quels sont les avions les plus sûrs.

## Exercice 2 .

Dans cette question, on considère l'équation différentielle  $(E_2)$  suivante :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 + f(x)$ .

- 1) Déterminer les solutions constantes de  $(E_2)$ .
- 2) a) Soit  $f$  une solution de  $(E_2)$ ,  
on note  $A$  une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $x \mapsto 1 + f(x)$  et  $g : x \mapsto f(x) \exp(-A(x))$   
Montrer que  $g$  est une fonction constante sur  $\mathbb{R}$ .  
b) En déduire que si  $f$  est une solution non nulle de  $(E_2)$  alors  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Soit  $f$  une solution non nulle de  $(E_2)$ , on note  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ .  
a) Montrer que  $h$  vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.  
b) En déduire qu'il existe un  $\lambda \in \mathbb{R}_-$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1}$ .
- 4) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E_2)$ .

## Problème.

Ce problème est consacré à l'étude d'une fonction  $f$ , solution d'une équation différentielle (**partie A**) dont on détermine les coefficients du développement limité en 0 dans la **partie B**.

La **partie C** est relative à l'étude d'une variable aléatoire discrète dans un cas élémentaire, cette étude étant généralisée dans la **partie D**.

Pour l'interprétation finale on pourra utiliser l'approximation :  $e^{-1} \approx 0,37$

### Partie A : Une fonction

- 1) On considère l'équation différentielle  $(E)$  suivante à résoudre sur l'intervalle  $I = ]-\infty, 1[$ :
$$y(x) + (x-1)y'(x) = e^{-x}$$
  - a) Ecrire  $(E)$  sous la forme  $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$  sur  $I$ ,  
où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur  $I$  à déterminer.
  - b) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$ .
  - c) Résoudre  $(E)$ . (*On utilisera la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière*)
- 2) On considère la fonction  $f$  définie par :
$$\forall x \in ]-\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{e^x(1-x)}$$
  - a) Démontrer que  $f$  est l'unique solution de  $(E)$  satisfaisant à la condition initiale  $y(0) = 1$ .
  - b) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $I$ .
- 3) Donner, en justifiant, le développement limité à l'ordre de 2 de  $f(x)$  au voisinage de 0.

### Partie B : Une suite

$f$  désigne toujours la fonction définie dans la **partie A**.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $d_n$  le coefficient de  $x^n$  dans le développement limité de  $f(x)$  au voisinage de 0 à l'ordre  $n$ .

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{n=0}^N d_n x^n + o(x^N)$$

- 1) a) Justifier l'existence de  $d_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . (*On utilisera entre autres la formule de Taylor-Young*)  
b) Exprimer  $d_n$  en fonction de  $f^{(n)}(0)$  et préciser  $d_0$ ,  $d_1$  et  $d_2$ .
- 2) a) Démontrer, par récurrence, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-\infty, 1[, \quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$

(*On pourra utiliser que  $f$  est une solution de  $(E)$* )

  
b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

### Partie C : Trois téléphones pour appeler les pompiers

Trois personnes sont invitées à une soirée, chacune d'elles dépose en arrivant son téléphone dans un sac. Au cours de la soirée un incendie se déclare et dans la précipitation chacun reprend un téléphone au hasard dans le sac.

On se demande si au moins une de ces personnes a pris son téléphone et va pouvoir prévenir les pompiers.

On considère la variable aléatoire  $X$  qui à chacune de ces redistributions de téléphones associe le nombre  $k$  d'invités ayant retrouvé leur propre téléphone.

On modélise cette expérience par l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, 3\}$  muni de la probabilité uniforme.

*Exemple :* La permutation  $(3, 2, 1)$  représente la situation où :

- la personne 1 prend le téléphone de la personne 3,
- la personne 2 prend son téléphone,
- la personne 3 prend le téléphone de la personne 1.

- 1) a) Écrire les permutations de  $\{1, 2, 3\}$ .  
b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .  
c) Interpréter  $P(X > 0)$  dans la situation étudiée.
- 2) a) Calculer l'espérance de  $X$ .  
b) Calculer sa variance.

### Partie D : $n$ téléphones

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On généralise le problème de la partie C en considérant  $n$  personnes invitées à une soirée.

Chacune de ces personnes dépose en arrivant son téléphone dans un sac. Au cours de la soirée un incendie se déclare et dans la précipitation chacun reprend un téléphone au hasard dans le sac.

On note  $X_n$  la variable aléatoire qui désigne le nombre  $k$  d'invités ayant retrouvé leur propre téléphone.

Enfin on note  $p_n = P(X_n = 0)$ .

- 1) a) Justifier que  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \frac{1}{2}$  et  $p_3 = \frac{1}{3}$   
b) Déterminer  $p_4$ .
- 2) Dorénavant, on pose par convention  $p_0 = 1$ .

- a) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}$

On pourra commencer par justifier que :  $\text{card}(X_n = k) = \binom{n}{k} \text{card}(X_{n-k} = 0)$

- b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$

- c) En déduire enfin que  $(p_n)$  est caractérisée par : 
$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} \end{cases}$$

- 3) a) Démontrer que l'espérance de  $X_n$  est égale à 1 et interpréter ce résultat.  
b) Le résultat précédent permet-il de conclure qu'il est très probable que "quelqu'un retrouve son téléphone" ?  
c) Calculer la variance de  $X_n$ .

- 4) On considère à nouveau la suite définie dans la partie B et on rappelle que celle-ci est caractérisée par :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

- a) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0$

- b) Démontrer par récurrence sur  $n$  que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$

- c) Déduire des questions précédentes que :  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = d_n$

- 5) a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

- b) En déduire que  $(p_n)$  converge, donner sa limite.

- c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n > 0)$  et une interprétation dans la situation étudiée.

# Développements limités en 0

## 1 Définition

Dire que  $f$  admet un DL d'ordre  $n$  en 0 :  
il existe  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et une fonction  $\varepsilon$  tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \varepsilon(x) x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

on note :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$

**Théorème :** (unicité)

Le polynôme associé au  $DL_n(0)$  est unique.

## 2 Troncature

si  $n \leq N$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^N a_k x^k + o(x^N) \implies f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

## 3 Lien avec les équivalents

Pour  $a \neq 0$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a x^n + o(x^n) \iff f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a x^n$$

## 4 Sommes et produits.

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) = P(x) + o(x^n) \\ g(x) = Q(x) + o(x^n) \end{cases}$$

❶ alors  $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + o(x^n)$   
*on fait la combinaison linéaire des parties régulières.*

❷ alors  $(f \times g)(x) = R(x) + o(x^n)$   
*on garde pour  $R$  les termes  $\leq n$  de  $P \times Q$ .*

❸ alors pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f^m(x) = R(x) + o(x^n)$   
*on garde pour  $R$  les termes  $\leq n$  de  $P^m$ .  $f$  est dérivable en 0*

## 5 Formule de Taylor-Young

Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  alors  $f$  admet un  $DL_n(0)$  et

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

## 6 DL usuels en 0

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + o(x^n)$$

## 7 Primitivation d'un DL

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

$$\implies f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

## 8 Lien avec la régularité

si, et seulement si,  $f$  admet un  $DL_1(0)$ .