

Correction du devoir surveillé 4 (samedi 22 novembre)

Exercice 1.

- 1) a) Si on regarde les moteurs d'un trimoteur, c'est une succession de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : "le moteur est en panne", de probabilité x) ; X_3 est le nombre de succès donc

$$X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(3, x) \text{ et } E(X_3) = 3x$$

On raisonne de même pour obtenir :

$$X_4 \hookrightarrow \mathcal{B}(4, x) \text{ et } E(X_4) = 4x$$

- b) On a :

$$\begin{aligned} P(X_3 < 3/2) &= P(X_3 = 0) + P(X_3 = 1) \\ &= (1-x)^3 + 3x(1-x)^2 \\ &= (1-x)^2(1+2x) \end{aligned}$$

La réponse développée est : $P(X_3 < 3/2) = 1 - 3x^2 + 2x^3$

- c) De même :

$$\begin{aligned} P(X_4 < 2) &= P(X_4 = 0) + P(X_4 = 1) \\ &= (1-x)^4 + 4x(1-x)^3 \\ &= (1-x)^3(1+3x) \end{aligned}$$

La réponse développée est : $P(X_4 < 2) = 1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4$

- 2) a) Notons :

- A : «le moteur sous l'aile gauche ne tombe pas en panne»
- B : «le moteur sous l'aile droite ne tombe pas en panne»
- C : «le moteur en queue d'avion ne tombe pas en panne».

Chacun de ces événements a pour probabilité $1-x$ et ils sont mutuellement indépendants.

On cherche la probabilité de : $T = ((A \cap B) \cup C)$ donc

$$\begin{aligned} P(T) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &= (1-x)^2 + (1-x) - (1-x)^3 \\ &= (1-x)(1-x+1-(1-x)^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T) = (1-x)(1+x-x^2)}$$

- b) Notons maintenant :

G_1 : «le 1er moteur sous l'aile gauche tombe en panne»

G_2 : «le 2ème moteur sous l'aile gauche tombe en panne»

D_1 : «le 1er moteur sous l'aile droite tombe en panne»

D_2 : «le 2ème moteur sous l'aile droite tombe en panne».

$\overline{Q} = (G_1 \cap G_2) \cup (D_1 \cap D_2)$ donc

$$\begin{aligned} P(Q) &= 1 - (P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap D_2) - P(G_1 \cap G_2 \cap D_1 \cap D_2)) \\ &= 1 - (x^2 + x^2 - x^4) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Q) = (1-x^2)^2 = (1-x)^2(1+x)^2}$$

- c) On remarque que :

$$\begin{aligned} P(T) - P(Q) &= (1-x)(1+x-x^2) - (1-x)^2(1+x)^2 \\ &= (1-x)(1+x-x^2 - (1-x)(1+2x+x^2)) \\ &= (1-x)x^3 \\ &> 0 \quad \text{car } x \in]0, 1[\end{aligned}$$

Les trimoteurs sont plus sûrs que les quadrimoteurs.

Exercice 2 .

1) Soit $c \in \mathbb{R}$, on note $f : x \mapsto c$, on a $f'(x) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 + f(x) \text{ si, et seulement si, } 0 = c^2 + c$$

donc f est solution de (E_2) si, et seulement si, $c = 0$ ou $c = -1$

les solutions constantes de (E_2) sont $x \mapsto 0$ et $x \mapsto -1$

2) a) La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \exp(-A(x)) - f(x)A'(x) \exp(-A(x)) \\ &= (f'(x) - f(x)(1 + f(x))) \exp(-A(x)) \quad \text{car } A'(x) = 1 + f(x) \\ &= 0 \quad \text{car } f \text{ solution de } (E_2) \end{aligned}$$

\mathbb{R} étant un intervalle on peut en conclure g est une fonction constante

b) Soit f une solution non nulle de (E_2) on alors d'après la question précédente il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \exp(-A(x)) = k$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = k \exp(A(x))$
 f est non nulle donc $k \neq 0$ et ainsi f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

si f est une solution non nulle de (E_2) alors f ne s'annule pas sur \mathbb{R}

3) a) f est dérivable sur \mathbb{R} et ne s'annule pas donc h est dérivable sur \mathbb{R} et $h' = -\frac{f'}{f^2}$

et sachant que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 + f(x)$ on obtient $h' + h = -1$

La fonction h est solution de $y' + y = -1$.

b) La fonction h est une solution de $y' + y = -1$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \lambda e^{-x} - 1$

mais la fonction h ne s'annule pas sur \mathbb{R} car $h = \frac{1}{f}$ donc nécessairement $\lambda \leq 0$

il existe un $\lambda \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1}$

Remarque : On a montré ici l'implication :

Si f solution non nulle de (E_2) alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1}$

4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-$ on note $f : x \mapsto \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1}$

(Cette fonction f est nouvelle elle n'est pas la même que f de la question 3) on ne sait pas qu'elle vérifie (E_2))

cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\lambda e^{-x}}{(\lambda e^{-x} - 1)^2}$

de plus $f(x)(1 + f(x)) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1}\right) = \frac{\lambda e^{-x}}{(\lambda e^{-x} - 1)^2}$.

donc on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 + f(x)$ ce qui montre que f est solution de (E_2) .

Remarque : On a montré ici l'implication :

S'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1}$ alors f solution de (E_2)

En résumant la réponse aux questions 3) et 4) :

Pour f une fonction non nulle on a l'équivalence :

f solution de (E_2) si, et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1}$

on peut alors conclure : (Attention à ne pas oublier la solution nulle)¹

$$S_{(E_2)} = \{x \mapsto 0\} \cup \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \mapsto \frac{1}{\lambda e^{-x} - 1} & \lambda \in \mathbb{R}_- \end{array} \right\}$$

1. On remarquera que la solution constante égale à -1 est bien dans cet ensemble en prenant $\lambda = 0$

Problème.

Partie A.

- 1) a) Pour $x \in]-\infty, 1[$, $x - 1 \neq 0$

donc (E) est équivalente à l'équation différentielle linéaire du premier ordre *(toujours noté (E))*:

$$y' + \frac{1}{x-1}y = \frac{e^{-x}}{x-1},$$

de la forme $y' + a(x)y = b(x)$, où les fonctions a et b sont continues sur $] -\infty, 1[$.

- b) On note (E_0) : $y' + \frac{1}{x-1}y = 0$ l'équation différentielle homogène associée à (E) .

La fonction $A : x \mapsto \ln|x-1|$ est une primitive de $a : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $] -\infty, 1[$ et :

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad e^{-\ln|x-1|} = \frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{1-x}$$

On en déduit l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de (E_0) :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ (]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\lambda}{1-x}), \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\lambda}{x-1}), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- c) Appliquons la méthode « de variation de la constante » en déterminant une solution particulière f_p de (E) de la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x-1}$, où λ est une fonction dérivable sur $] -\infty, 1[$.

On a : $\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f'_p(x) + \frac{1}{x-1}f_p(x) = \frac{\lambda'(x)}{x-1}$, donc :

$$(f_p \text{ est solution de } (E)) \iff \forall x \in] -\infty, 1[, \quad \frac{\lambda'(x)}{x-1} = \frac{e^{-x}}{x-1} \iff \forall x \in] -\infty, 1[, \quad \lambda'(x) = e^{-x}.$$

On en déduit que la fonction : $]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-e^{-x}}{x-1}$ est une solution particulière de (E) sur $] -\infty, 1[$.

Notons que l'on peut écrire : $\forall x \in] -\infty, 1[, \quad \frac{-e^{-x}}{x-1} = \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{1}{e^x(1-x)}$.

On obtient en conclusion l'ensemble des solutions de (E) sur $] -\infty, 1[$:

$$S = \left\{ (]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)} + \frac{\lambda}{x-1}), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- 2) a) Pour tout réel λ , notons f_λ la fonction : $]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)} + \frac{\lambda}{x-1}$.

On a les équivalences suivantes : $f_\lambda(0) = 1 \iff 1 - \lambda = 1 \iff \lambda = 0$.

On en déduit que :

f est l'unique solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$.

- b) f est solution de (E) , donc f dérivable sur $] -\infty, 1[$ et $\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f(x) + (x-1)f'(x) = e^{-x}$.

Il s'ensuit :

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{x-1}e^{-x} - f(x) = \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x(1-x)} \right) = \frac{x}{e^x(x-1)^2}$$

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f'(x) = \frac{x}{e^x(x-1)^2}$$

Donc, sur $] -\infty, 1[$, $f'(x)$ est du signe de x , ce qui implique que

f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1[$.

En $+\infty$: $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{-1}{xe^x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$ (croissances comparées), donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

En 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^x(1-x) = 0^+$. donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	\searrow	\nearrow $+\infty$

3) Pour tout x appartenant à $] -\infty, 1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \times \frac{1}{1-x} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) (1 + x + x^2 + o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + x^2) + (-x - x^2) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Partie B :

1) a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, 1[$, donc f admet un développement limité en 0 à tout ordre, ce qui justifie que $[d_n$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}]$.

b) D'après la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$.

On en déduit, par unicité du développement limité : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

On a déjà obtenu : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, ce qui conduit à :

$$\boxed{d_0 = 1, \quad d_1 = 0 \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{1}{2}.}$$

2) a) Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -\infty, 1[$, $(n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x}$.

• Pour $n = 0$: la fonction f étant solution de (E) , elle vérifie donc :

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f(x) + (x-1)f'(x) = e^{-x}$$

on a bien :

$$\forall x \in] -\infty, 1[\quad (0+1)f^{(0)}(x) + (x-1)f^{(0+1)}(x) = (-1)^0 e^{-x}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in] -\infty, 1[$, $(n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x}$

On suppose que la propriété est vraie à un rang n

on en déduit en dérivant chacun des membres :

$$\forall x \in] -\infty, 1[\quad (n+1)f^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x) + (x-1)f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x}$$

ce qui donne :

$$\forall x \in] -\infty, 1[\quad (n+2)f^{(n+1)}(x) + (x-1)f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x}$$

On retrouve la propriété au rang $n+1$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -\infty, 1[\quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x}}$$

b) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)f^{(n)}(0) - f^{(n+1)}(0) = (-1)^n,$$

donc, d'après 1)b)

$$\underbrace{(n+1)n!d_n - (n+1)!d_{n+1}}_{(n+1)!} = (-1)^n,$$

d'où :

$$(n+1)!d_{n+1} = (n+1)!d_n - (-1)^n = (n+1)!d_n + (-1)^{n+1}.$$

Il s'ensuit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Partie C :

1) a)

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}. \quad \text{Card}(\Omega) = 3! = 6$$

b) $X(\omega) \subset \{0, 1, 3\}$

$$(X = 0) = \{(3, 1, 2), (2, 3, 1)\} \quad \text{donc } P(X = 0) = \frac{2}{6}$$

$$(X = 1) = \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \quad \text{donc } P(X = 1) = \frac{3}{6}$$

$$(X = 3) = \{(1, 2, 3)\} \quad \text{donc } P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

On obtient la loi de probabilité de X :

k	0	1	3
$P(X = k)$	1/3	1/2	1/6

c) $P(X > 0) = \frac{2}{3}$ est la probabilité qu'au moins une personne retrouve son téléphone.

Sur un grand nombre de répétitions, on observerait que dans environ deux cas sur trois, au moins une personne retrouve son téléphone et peut prévenir les secours.

2) Avec des notations standard :

a)

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 kP(X = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = 1,$$

$$b) E(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 P(X = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{6} = 2, \text{ donc, d'après la formule de Koenig-Huygens :}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1 = 1.$$

Partie D :

On prend pour univers Ω l'ensemble des permutations des éléments de $[1, n]$, que l'on munit de la loi de probabilité uniforme P . On a : $\text{Card}(\Omega) = n!$. Notons que X_n prend ses valeurs dans $[0, n]$.

1) a) - Lorsqu'il n'y a qu'un seul invité, celui-ci repart avec son propre téléphone, donc : $p_1 = 0$.

- Lorsqu'il n'y a que deux invités, le premier qui prend un téléphone, choisit au hasard entre deux téléphones

$$\text{donc : } p_2 = \frac{1}{2}.$$

$$- \text{D'après C. 2. b. : } P(X_3 = 0) = \frac{1}{3}, \text{ donc : } p_3 = \frac{1}{3}.$$

b) Les résultats qui réalisent l'événements $(X_4 = 0)$ sont :

$$(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1).$$

Donc :

$$p_4 = \frac{9}{4!} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3 \times 2} \quad p_4 = \frac{3}{8}$$

2) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Construire une redistribution des téléphones qui réalise l'événement $(X_n = k)$, c'est :

- choisir les k téléphones qui repartiront avec leur propriétaire, il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire,
- puis choisir une redistribution des $n - k$ téléphones restants de telle sorte qu'aucun ne soit attribué à son propriétaire, il y a $\text{Card}(X_{n-k} = 0)$ façons de le faire,

$$\text{donc : } \text{Card}(X_n = k) = \binom{n}{k} \text{Card}(X_{n-k} = 0).$$

on obtient :

$$\text{Card}(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \text{Card}(X_{n-k} = 0)$$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}.}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des valeurs prises par X_n est inclus dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, donc :

$$\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$$

autrement dit, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$$

De plus, pour $n = 0$, l'assertion : " $\sum_{k=0}^n \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$ " s'écrit : " $p_0 = 1$ ", ce qui est vrai d'après la convention fixée par l'énoncé, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{p_{n-k}}{k!} = 1.}$$

c) D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1,$$

donc, en isolant le terme de la somme correspondant à $k = 0$: $p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1$, autrement dit :

$$p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}$$

Il s'ensuit que la suite (p_n) vérifie les relations :
$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}. \end{cases}$$

- De plus, d'après le principe de récurrence, ces relations permettent de calculer de proche en proche les termes de la suite (p_n) , puisque dans la somme $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}$ ne figurent que des p_i avec $0 \leq i \leq n$.

En conclusion :

$$\boxed{(p_n) \text{ est caractérisée par : } \begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}. \end{cases}}$$

- 3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. ($X_n(\Omega)$ est fini donc X_n admet une espérance.)

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^n kP(X_n = k) \stackrel{\text{D.2. a.}}{=} \sum_{k=0}^n k \frac{p_{n-k}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{p_{n-k}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{n-(k+1)}}{k!}$$

d'où :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{(n-1)-k}}{k!}$$

et d'après la question D. 2. c. :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 1}$$

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante :

en moyenne, un seul des invités repart avec son propre téléphone à la fin de la soirée.

- b) L'espérance ne permet d'avoir une idée de la probabilité de $P(X_n > 0)$.

On peut avoir une espérance égale à 1 et une probabilité très faible.

(Exemple : $P(X = 0) = 0,99$ et $P(X = 100) = 0,01$)

- c) X_1 est une variable aléatoire certaine, donc : $\mathbb{V}(X_1) = 0$.

Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 2. ($X_n(\Omega)$) est fini donc X_n admet une variance.)

Commençons par calculer l'espérance de la variable aléatoire $(X_n - 1)X_n$:

$$\mathbb{E}((X_n - 1)X_n) = \sum_{k=0}^n (k-1)kP(X_n = k) = \sum_{k=0}^n (k-1)k \frac{p_{n-k}}{k!} = \sum_{k=2}^n \frac{p_{n-k}}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{p_{n-2-k}}{k!} = 1.$$

De plus, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}((X_n - 1)X_n) = \mathbb{E}(X_n^2 - X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)$, donc :

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}((X_n - 1)X_n) + \mathbb{E}(X_n) = 1 + 1 = 2.$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = 2 - 1.$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = 1}$$

- 4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'une part : $(1-1)^n = 0^n \underset{n \geq 1}{=} 0$, et d'autre part, d'après la formule du binôme :

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0.}$$

- b) Pour tout n de \mathbb{N} , notons \mathcal{P}_n l'assertion « $\sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$ »

- \mathcal{P}_0 s'écrit : « $d_0 = 1$ », donc \mathcal{P}_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons \mathcal{P}_n vraie et démontrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, c'est-à-dire : $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!} = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(d_{n-k} + \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \right) + \frac{d_0}{(n+1)!} && \text{(d'après la formule de la partie B)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!(n+1-k)!} + \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1 + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 1 && \text{(avec le résultat de 5)a))} \end{aligned}$$

ce qui prouve que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a démontré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} = 1.}$$

c) On déduit de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}$$

donc la suite (d_n) vérifie :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}, \end{cases}$$

et d'après la question D. 2. c. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = d_n$$

- 5) a) $p_0 = 1$ et d'après la question précédente et la question B. 2. b. : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = p_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Une récurrence immédiate permet alors d'obtenir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$$

- b) On sait que, pour tout réel x , la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et a pour somme e^x , donc :

$$\boxed{\text{la suite } (p_n) \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

- c) $P(X_n > 0) = 1 - p_n \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n > 0) = 1 - e^{-1} \approx 0,63$

Pour n grand :

Si on répétait cette situation un grand nombre de fois, environ 6 fois sur 10, quelqu'un pourrait appeler les secours.

Remarque du correcteur :

On peut ici rappeler que, même si personne ne retrouve son propre téléphone, cela n'empêche pas d'appeler les numéros d'urgence, qui restent accessibles depuis n'importe quel appareil.