Feuille_Act_13 : Fonctions indicatrices.

Ex 1 : Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes *(définies sur $\mathbb{R}$)*.

❶ $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ❷ $\mathbb{1}_{[\![0,6]\!]}$ ❸ $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ ❹ $x \longmapsto e^{-x}\,\mathbb{1}_{x\in[0,+\infty[}$ ❺ $x \longmapsto x^2\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

❻ $x \longmapsto (1-e^{-2x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ ❼ $x \longmapsto 1-e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ ❽ $x \longmapsto \dfrac{x+1}{2}\,\mathbb{1}_{0\leqslant x\leqslant 1} + \mathbb{1}_{1<x}$

Ex 2 : Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} k\,\mathbb{1}_{k \text{ pair}} \qquad S_2(k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{1\leqslant k-i\leqslant n} \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{i<j}$$

$$S_4(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\,\mathbb{1}_{k\leqslant n} \qquad S_5(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\,\mathbb{1}_{k\geqslant n} \qquad S_6 = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{j\leqslant i}\frac{1}{2^{j+j}}$$

Ex 3 : Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathbb{1}_{k \text{ pair}} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathbb{1}_{n \text{ pair}}$$

Indication : on pourra utiliser les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{1}_{kimpair}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\,\mathbb{1}_{nimpair}$

Ex 4 :

1) Décrire simplement $\mathbb{1}_{\varnothing}$ et $\mathbb{1}_E$.
2) Soient A et B deux parties de E,
   a. montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
   b. montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
   c. en déduire $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$
   d. montrer que : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
3) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
   a. Déterminer $\mathbb{1}_{A\cup B\cup C}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.
   b. En supposant que E est un ensemble fini,
      déduire de la question précédente l'expression de $\text{card}(A\cup B\cup C)$ en fonction du cardinal d'intersections des ensembles A, B et C.

Ex 5 : Soient n un entier naturel non nul, et E un ensemble fini de cardinal n.

1) Montrer que : pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{A\in\mathscr{P}(E)} \mathbb{1}_A(x) = 2^{n-1}$ *Indication : On pourra la bijection $A \longmapsto \overline{A}$*
2) En déduire que : $\displaystyle\sum_{A\in\mathscr{P}(E)} \text{card}(A) = n2^{n-1}$

Ex 6 : Calculer les sommes suivantes : *(On discutera en fonction de la valeur de l'entier relatif k)*

1) $S_1(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{k\leqslant i\leqslant k+n}$
2) $S_2(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{k-n\leqslant i\leqslant k}$
3) $S_3(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{k-n\leqslant i\leqslant k+n}$
4) $S_4(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{1\leqslant k-i\leqslant n}$

Ex 7 : On a quatre urnes U_1, U_2, U_3 et U_4 contenant toutes : 3 boules rouges et 6 boules vertes.
On prend une boule dans chacune des urnes et on note R_i : "obtenir une boule rouge dans l'urne U_i"

1) Exprimer en une phrase l'événement : $(R_1\cup R_2)\cap(R_3\cup R_4)$.
2) Calculer la probabilité de l'événement $R_1\cup R_2$.
3) Justifier que les événements $R_1\cup R_2$ et $R_3\cup R_4$ sont indépendants.
4) En déduire la probabilité de $(R_1\cup R_2)\cap(R_3\cup R_4)$.

Extrait d'un concours 2025

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel avec $n \geqslant 2$, Ω un ensemble et $\mathscr{T}$ une tribu sur cet ensemble. On rappelle que si A est une partie de Ω, on appelle fonction indicatrice de A l'application définie ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, si A est un événement, alors $\mathbb{1}_A$ est la variable aléatoire valant 1 si l'événement A est réalisé et 0 sinon.

On rappelle également que la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ se note classiquement $\lfloor x \rfloor$.

Dans tout le problème, on considère quatre variables aléatoires X, Y, Z et T définies sur Ω, mutuellement indépendantes telles que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1], Y$ la loi de Bernoulli de paramètre $y \in [0,1], Z$ la loi de Bernoulli de paramètre $z \in [0,1]$ et T la loi de Bernoulli de paramètre $t \in [0,1]$.
Ce problème est consacré à des situations variées issues de l'étude de X, Y, Z et T.

En partie A, on étudie quatre variables aléatoires obtenues à partir de X, Y, Z et T. Dans la partie B (qui dépend de la partie A), on étudie un problème concret pouvant se modéliser à l'aide de X, Y, Z et T.
Les parties C et D sont plus algébriques et indépendantes des deux parties A et B . [...]

Partie A : Variables aléatoires déduites de X, Y, Z et T

1) Soit S la somme définie par $S = X + Y + Z + T$ et P le produit défini par $P = XYZT$.
   a. Calculer l'espérance de S et sa variance.
   b. Justifier que P suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
2) On pose $M = \max\{X, Y, Z, T\}$ et $N = \min\{X, Y, Z, T\}$.
   a. Justifier que ces deux variables aléatoires suivent également des lois de Bernoulli dont on déterminera les paramètres.
   b. À quelle condition nécessaire et suffisante, M et N sont-elles indépendantes ?

Partie B : Quatre doctorantes.

Un laboratoire de recherche en géologie dispose de n échantillons de roches numérotés de 1 à n.
Quatre doctorantes, Xavière, Yasmine, Zélie et Tina doivent chacune mener des expériences sur ces n échantillons.
Malheureusement, pour chacune de ces $4n$ expériences, il existe un risque que l'expérience ne soit pas concluante.

On admet que, à chaque expérience, Xavière a une probabilité x que l'expérience soit non concluante. De même les probabilités correspondantes à chacune des expériences de Yasmine, Zélie et Tina sont respectivement y, z et t. On admet également que les $4n$ expériences sont mutuellement indépendantes.

3) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement ≪les quatre expériences menées sur le i-ème échantillon sont toutes non concluantes≫.
   a. Démontrer que $P(A_i) = xyzt$.
   b. Exprimer par une phrase en français ce que représente la variable aléatoire définie par la somme $\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$ et donner, en justifiant, la loi suivie par celle-ci.
   c. Calculer la probabilité qu'un seul échantillon ait donné quatre expériences toutes non concluantes.
4) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i l'événement ≪au moins une des quatre expériences menées sur le i-ème échantillon est non concluante≫.
   a. Que représente la variable aléatoire définie par la somme $\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} + \cdots + \mathbb{1}_{B_n}$?
   b. Exprimer sous forme d'une somme, la probabilité qu'au plus la moitié des échantillons aient donné quatre expériences non toutes concluantes.

Partie C : En algèbre.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & T(\omega) \end{pmatrix}$.

5)
6)
7)

Partie D : Résolution d'une équation du troisième degré.

8)
9) Dans cette dernière question, on résout l'équation (E) ci-dessous d'inconnue $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$: $v^3 + v = u$

   On procède pour cela par analyse-synthèse, c'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe au moins une solution v pour en déduire la (ou les) valeur(s) prise(s) par v puis réciproquement, on vérifie que cette ou ces valeur(s) est (sont) solution(s).