BCPST  $2_A$ 2025/2026

Correction de la feuille\_Act\_13 : Fonctions indicatrices.

## Définition:

Soient E un ensemble et A une partie de E,

Soient 
$$E$$
 un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ ,

On appelle **fonction indicatrice** de  $A$ ,  $(not\acute{e}:\mathbb{1}_A)$  l'application de :  $E\longrightarrow \{0,1\}$ 

$$x\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque**:  $\mathbb{1}_A$  peut prendre juste deux valeurs 0 et 1 donc  $\forall x \in E$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$ .

Une autre notation.

Soit E un ensemble et P(x) une propriété dépendant d'un élément x de E. en notant  $A = \{x \in E \mid P(x)\}$  pour tout  $x \in E$ , on note :  $\mathbb{1}_{P(x)} = \mathbb{1}_A(x)$ 

**Remarque**: Si P(x) vraie alors  $\mathbb{1}_{P(x)} = 1$  sinon  $\mathbb{1}_{P(x)} = 0$ .

Cours sur les ensembles finis :

Soit E un ensemble fini,

- **0** Soit A une partie de E, card $(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$
- **2** Soient A et B deux parties de E,  $\operatorname{card}(A \cap B) = \sum_{x \in A} \mathbb{1}_B(x)$

Cours sur l'indépendance des événements et des VAR :

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  un système probabilisé.

- $\bullet$  Si A est un événement alors  $\mathbb{1}_A$  est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli  $\mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$
- **2** (Complément) Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  une famille d'événements, Les événements  $A_k$  sont mutuellement indépendants si, et seulement si, les variables aléatoires  $\mathbb{1}_{A_k}$  sont indépendantes.

Ex 1: (Fait au tableau)

**Ex 2:** •  $S_1$  est la somme des entiers pairs de [0; 2n], autrement dit :  $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2k$  et ainsi  $S_1 = 2\sum_{k=0}^{n} k$ 

$$S_1 = n(n+1)$$

$$S_{2}(k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{1 \leq k-i \leq n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{k-n \leq i \leq k-1}$$

$$= \operatorname{card} ([[k-n, k-1]] \cap [[0; n]])$$

donc 
$$S_2(k) = \begin{cases} 0 & \text{si} & k \le 0 \\ k & \text{si} & 1 \le k \le n \\ n & \text{si} & k = n+1 \\ 2n+1-k & \text{si} & n+2 \le k \le 2n \\ 0 & \text{si} & 2n+1 \le k \end{cases}$$

$$donc S_3 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ex 3: (non corrigé)

**Ex 4 :** 1)  $\mathbb{1}_{\emptyset}$  est la fonction nulle et  $\mathbb{1}_E$  est la fonction constante égale à 1.

- 2) a. Raisonnons par disjonction de cas.
  - pour  $x \in A$ ,  $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) + \mathbb{1}_{A}(x) = 0 + 1 = 1$
  - pour  $x \notin A$ ,  $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) + \mathbb{1}_{A}(x) = 1 + 0 = 1$

Dans tous les cas  $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) + \mathbb{1}_A(x) = 1$  et ainsi  $\boxed{\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$ 

- b.  $\bullet$  pour  $x \in A \cap B$ ,  $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1$  et  $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$ 
  - $\bullet$  pour  $x\not\in A\cap B,\, \mathbbm{1}_{A\cap B}(x)=0$  et  $1_A(x)=0$  ou  $1_B(x)=0$  donc  $1_A(x)\times \mathbbm{1}_B(x)=0$

Dans tous les cas  $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$  et ainsi  $\boxed{\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$ 

- c. Raisonnons par disjonction de cas.
  - si  $x \in A \cap B$ ,  $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$  et  $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(1, 1) = 1$
  - si  $x \in \overline{A} \cap B$ ,  $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$  et  $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(0, 1) = 1$
  - •si  $x \in A \cap \overline{B}$ ,  $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$  et  $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(1, 0) = 1$
  - •si  $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ ,  $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 0$  et  $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(0, 0) = 0$

Dans tous les cas  $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x))$  et ainsi  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ 

3) (non corrigée)

Ex 5: (non corrigée)

Ex 6: (non corrigée)

Ex 7: (non corrigée)

Extrait du sujet G2E 2025

## Partie A.

1) a. La linéarité de E(.) donne E(S) = E(X) + E(Y) + E(Z) + E(T) donc

L'espérance de S est égale à x + y + z + t

Les variables sont mutuellement indépendantes donc V(S) = V(X) + V(Y) + V(Z) + V(T) donc

La variance de S est égale à 
$$x(1-x) + y(1-y) + z(1-z) + t(1-t)$$

b. P est le produit de variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc P aussi et P suit une loi de Bernoulli.

de plus  $(P=1)=(X=1)\cap (Y=1)\cap (Z=1)\cap (T=1)$  et les variables sont mutuellement indépendantes donc  $\mathbb{P}(P=1)=xyzt$ 

P suit la loi de Bernoulli de paramètre xyzt

2) a. M est la valeur maximale prise par des variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc M aussi et M suit une loi de Bernoulli.

de plus  $(M=0)=(X=0)\cap (Y=0)\cap (Z=0)\cap (T=0)$  et les variables sont mutuellement indépendantes donc  $\mathbb{P}(M=0)=(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$ 

$$M$$
 suit la loi de Bernoulli de paramètre  $1-(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$ 

m est la valeur minimale prise par des variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc m aussi et m suit une loi de Bernoulli.

de plus  $(N=1)=(X=1)\cap (Y=1)\cap (Z=1)\cap (T=1)$  et les variables sont mutuellement indépendantes donc  $\mathbb{P}(N=1)=xyzt$ 

## N suit la loi de Bernoulli de paramètre xyzt

b. On sait  $P((M=0)\cap (N=1))=0$  donc si M et N sont indépendantes alors  $\mathbb{P}(M=0)=0$  ou  $\mathbb{P}(N=1)=0$ 

donc nécessairement M est certaine égale à 1 ou N est certaine égale à 0.

Réciproquement, si une de ces deux variables aléatoires est certaine alors elles sont indépendantes.

de plus M est certaine égale à 1 si, et seulement si, x = 1 ou y = 1 ou z = 1 ou t = 1

et N est certaine égale à 0 si, et seulement si, x = 0 ou y = 0 ou z = 0 ou t = 0

En conclusion:

M et N sont indépendantes si, et seulement si,  $(x, y, z, t) \notin [0, 1]^4$ 

## Partie B.

- 3) On note  $X_i$  (resp.  $Y_i$ ,  $Z_i$  et  $T_i$ ) la variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur 1 si, et seulement si, l'expérience menée par Xavière (resp. Yasmine, Zélie et Tina) sur l'échantillon i.
  - a.  $A_i = (X_i = 1) \cap (Y_i = 1) \cap (Z_i = 1) \cap (T_i = 1)$  et ces 4 variables sont mutuellement indépendantes donc

$$P(A_i) = xyzt$$

b.  $\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$  est le nombre d'échantillons pour lesquels les quatre expériences ont été non concluantes

 $\mathbb{1}_{A_i}$  suit la loi de Bernoulli de paramètre xyzt et les variables  $(\mathbb{1}_{A_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$  sont mutuellement indépendantes.

donc 
$$\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}$$
 suit la loi binomiale de paramètres  $(n, xyzt)$ 

c. En notant  $U=\mathbbm{1}_{A_1}+\cdots+\mathbbm{1}_{A_n}$  on cherche ici  $\mathbb{P}(U=1)$  et comme  $U\sim \mathscr{B}(n,xyzt)$  il vient :

La probabilité demandée est égale à : 
$$nxyzt(1-xyzt)^{n-1}$$

- 4) Autrement dit :  $B_i$  : "au *i*ème échantillon les 4 expériences sont non toutes concluantes"
  - a.  $\mathbb{1}_{B_1} + \dots + \mathbb{1}_{B_n}$  est le nombre d'échantillons pour lesquels les quatre expériences sont non toutes concluantes Remarque :  $\overline{B_i}$  : "au ième échantillon les 4 expériences sont toutes concluantes"
  - b. On note  $V = \mathbbm{1}_{B_1} + \dots + \mathbbm{1}_{B_n}$  et on remarque que :  $P(\overline{B_i}) = (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$ V suit la loi binomiale de paramètres  $\left(n, 1-(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\right)$  et on veut  $P\left(V \leqslant \frac{n}{2}\right)$  donc

La probabilité recherchée est : 
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \Big(1 - (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\Big)^k \Big((1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\Big)^{n-k}$$