Feuille_Cours_5_3 : Variables aléatoires discrètes. Lois usuelles dénombrables.

La loi géométrique.

(Temps d'attente, une loi sans mémoire)

Expérience type : Une succession d'un nombre indéfini d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On s'intéresse à X le nombre nécessaire d'épreuves pour obtenir le premier succès.

Exemple : On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$
et on note X le nombre de lancer nécessaire pour obtenir Pile. *(Autrement dit : X est le rang du premier Pile.)*

Sans perte de généralité, on travaille sur l'exemple dans les questions suivantes.

1) Quelles sont les valeurs prises par X ?

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $(X = k)$ à l'aide des événements T_i : " le $i^{\text{ième}}$ lancer donne Pile" .

3) En déduire que : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$

4) En déduire que X est une variable aléatoire discrète bien définie.

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X > k)$ par un raisonnement,
puis retrouver ce résultat par un calcul avec la loi de X.

6) Montrer que X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{p}$. *(Décrire une situation classique pour retenir ce résultat)*

7) Montrer que X admet une variance et $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$. (En notant : $q = 1 - p$)

8) Montrer que : $\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $P\Big([X = n + k] \,\big|\, [X > k]\Big) = P([X = n])$

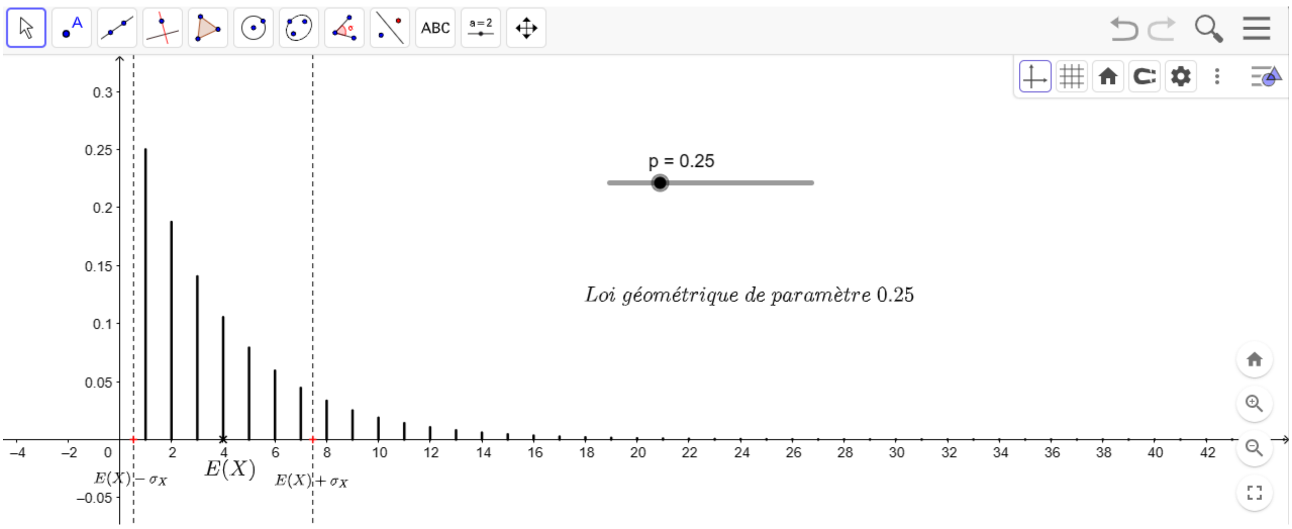
9) Interpréter l'événement $[X > k]$, puis le résultat de la question précédente.

10) Montrer que : $\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $P\Big([X > n + k] \,\big|\, [X > k]\Big) = P([X > n])$

11) Ecrire une fonction Python qui prend en entrée pour arguments un réel p et qui simule la réalisation de X.

– –

Si vous aviez le temps vous pourriez faire une animation avec géogébra.



Vérifiez la cohérence des résultats précédents avec cette représentation de la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$.

$\boxed{\textbf{Loi de Poisson.}}$ *(Nombre d'occurrences d'un événement dans un intervalle fixé)*

Situation type : On observe X le nombre d'occurrence[1] d'un événement sur un intervalle de temps *(ou d'espace)* avec les conditions suivantes :

Les réalisations de l'événement sont indépendantes les unes des autres.
La fréquence moyenne des réalisations de cet événement est constante.
On note λ cette constante réelle et strictement positive[2].

Exemple. Le nombre de clients dans un magasin entre 10h et 13h est en moyenne de 4,5.
On suppose que des clients peuvent arriver à tout instant indépendamment de ce qui s'est passé avant.

Exemple type. Le nombre de réalisations de l'événement A sur un intervalle de temps $[0,T]$ est en moyenne de λ.
On suppose que les réalisations de A sont indépendantes les unes des autres.

Pour les premières questions on discrétise l'intervalle $[0,T]$ en n intervalles de même amplitude[3] :

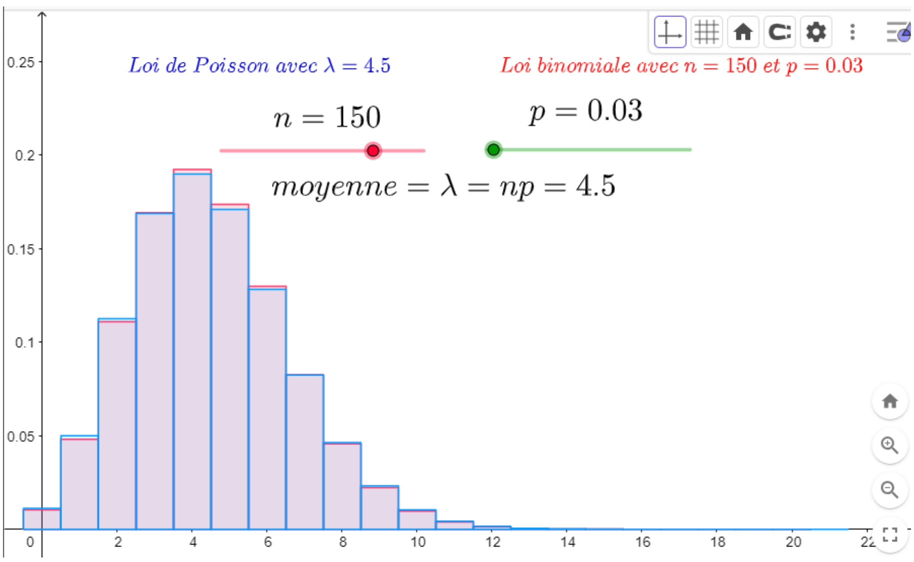
$$\left[\,0\,,\,T\,\right]\cup = \left[\,0\,,\,dt\,\right[\,\cup\left[\,dt\,,\,2dt\,\right[\,\cup\,\cdots\,\cup\left[\,(n-1).dt\,,\,n.dt\,\right]$$

On fixe n suffisamment grand pour que sur chaque intervalle $\left[\,k.dt\,,\,(k+1)dt\,\right[$ on n'observe zéro ou une réalisation de A.

L'expérience peut alors être vue comme la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Le succès : "on observe A dans un intervalle de largeur dt". La probabilité du succès : p_n à déterminer.

1) En notant X_n le nombre d'intervalles où A se réalise, quelle est la loi de X_n ?
2) Quelle est l'espérance de X_n ?
3) Que vaut p_n si on veut que $E(X_n)=\lambda$?
4) Soient $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et $k\in\mathbb{N}$, on note $(u_n)_{n\geqslant k}$ la suite définie par $u_n=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$,
   a. Donner, pour k fixé, un équivalent simple de la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Déterminer, pour k fixé, la limite des suites suivantes $\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   c. Pour k fixé, montrer que (u_n) converge vers un réel à déterminer.
5) Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, on définit $X:\Omega\to\mathbb{R}$ par : $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
   a. Montrer qu'on définit bien ainsi une variable aléatoire discrète.
   b. Montrer que X admet une espérance et que $E(X)=\lambda$
   c. Montrer que X admet une variance et que $V(X)=\lambda$

Si vous aviez le temps vous pourriez faire une animation avec géogébra.



---

1. Occurrence d'un événement : son apparition dans le temps ou l'espace.
2. λ : Lambda la 11$^{\text{ième}}$ lettre de l'alphabet grec
3. subdivision régulière de $[0,T]$