

Caractérisation (*Indépendance de variables aléatoires discrètes*).

Méthode (*Somme de deux VAR discrètes indépendantes et à valeurs entières*).

Ex 1 : 1) Soient λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$$

Montrer que la variable aléatoire $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

2) Généraliser le résultat de 1) à n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Poisson.

Des résultats préliminaires.

• Compléter avec min ou max de sorte que les équivalences soient correctes.

Pour tout $(a, x, y) \in \mathbb{R}^3$,

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ y \leq a \end{cases} \iff \dots\dots\dots (x, y) \leq a$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} a < x \\ \text{et} \\ a < y \end{cases} \iff a < \dots\dots\dots (x, y)$$

• Compléter avec $\min_{1 \leq i \leq n}$ ou $\max_{1 \leq i \leq n}$ de sorte que les équivalences soient correctes.

Pour tout $(a, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\textcircled{3} \quad \forall i \in [1, n], \quad x_i \leq a \iff \dots\dots\dots (x_i) \leq a$$

$$\textcircled{4} \quad \forall i \in [1, n], \quad a < x_i \iff a < \dots\dots\dots (x_i)$$

• Compléter les égalités suivantes avec $k-1$, k ou $k+1$: où X est une variable aléatoire réelle et k est un entier.

$$P(X = k) = P(X > \dots\dots\dots) - P(X > \dots\dots\dots)$$

$$P(X = k) = P(X \geq \dots\dots\dots) - P(X \geq \dots\dots\dots)$$

$$P(X = k) = P(X < \dots\dots\dots) - P(X < \dots\dots\dots)$$

$$P(X = k) = P(X \leq \dots\dots\dots) - P(X \leq \dots\dots\dots)$$

Méthode (*Maximum de deux VAR discrètes indépendantes, à valeurs entières*).

- Ex 2 :**
- 1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
 - 2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$.
Déterminer la loi de $Z_2 = \max(X, Y)$.

Méthode (*Minimum de deux VAR discrètes indépendantes, à valeurs entières*).

- Ex 3 :**
- 1) Soient $p \in]0, 1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de $Z_1 = \min(X, Y)$.
 - 2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 10])$.
Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.

Méthode (*Maximum de n VAR discrètes indépendantes, à valeurs entières*).

- Ex 4 :**
- 1) Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$,
Déterminer la loi de $Y_1 = \max(X_1, \dots, X_n)$
 - 2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_5$ cinq variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([1, n])$,
Déterminer la loi de $Y_2 = \max(X_1, \dots, X_5)$.

Méthode (*Minimum de n VAR discrètes indépendantes, à valeurs entières*).

- Ex 5 :**
- 1) Soient $p \in]0, 1[$, $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$,
Déterminer la loi de $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$
 - 2) Soient $X_1, \dots, X_5$ cinq variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([1, 6])$,
Déterminer la loi de $Y_2 = \min(X_1, \dots, X_5)$.