

Définition :

Soient E un ensemble et A une partie de E ,

On appelle **fonction indicatrice** de A , (notée : $\mathbb{1}_A$) l'application de : $E \longrightarrow \{0, 1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : $\mathbb{1}_A$ peut prendre juste deux valeurs 0 et 1 donc $\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$.

Une autre notation.

Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'un élément x de E .

en notant $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ pour tout x de E , on note : $\mathbb{1}_{P(x)} = \mathbb{1}_A(x)$

Remarque : Si $P(x)$ vraie alors $\mathbb{1}_{P(x)} = 1$ sinon $\mathbb{1}_{P(x)} = 0$.

Cours sur les ensembles finis :

Soit E un ensemble fini,

❶ Soit A une partie de E , $\text{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$

❷ Soient A et B deux parties de E , $\text{card}(A \cap B) = \sum_{x \in A} \mathbb{1}_B(x)$

Cours sur l'indépendance des événements et des VAR :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un système probabilisé.

❶ Si A est un événement alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

❷ (Complément) Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'événements,

Les événements A_k sont mutuellement indépendants

si, et seulement si, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_k}$ sont indépendantes.

Ex 1 : (Fait au tableau)

Ex 2 : • S_1 est la somme des entiers pairs de $\llbracket 0; 2n \rrbracket$, autrement dit : $S_1 = \sum_{k=0}^n 2k$ et ainsi $S_1 = 2 \sum_{k=0}^n k$

$$S_1 = n(n+1)$$

•

$$\begin{aligned} S_2(k) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{1 \leq k-i \leq n} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{k-n \leq i \leq k-1} \\ &= \text{card}(\llbracket k-n, k-1 \rrbracket \cap \llbracket 0; n \rrbracket) \end{aligned}$$

donc
$$S_2(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq 0 \\ k & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ n & \text{si } k = n+1 \\ 2n+1-k & \text{si } n+2 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{si } 2n+1 \leq k \end{cases}$$

•

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{i < j} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 1 \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\
 &= \sum_{j=1}^n (j-1)
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{S_3 = \frac{n(n-1)}{2}}$

Ex 3 : (non corrigé)

Ex 4 : 1) $\mathbb{1}_\emptyset$ est la fonction nulle et $\mathbb{1}_E$ est la fonction constante égale à 1.

2) a. *Raisonnons par disjonction de cas.*

• pour $x \in A$, $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) + \mathbb{1}_A(x) = 0 + 1 = 1$

• pour $x \notin A$, $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) + \mathbb{1}_A(x) = 1 + 0 = 1$

Dans tous les cas $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) + \mathbb{1}_A(x) = 1$ et ainsi $\boxed{\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$

b. • pour $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$

• pour $x \notin A \cap B$, $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$ donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0$

Dans tous les cas $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$ et ainsi $\boxed{\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$

c. *Raisonnons par disjonction de cas.*

• si $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$ et $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(1, 1) = 1$

• si $x \in \bar{A} \cap B$, $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$ et $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(0, 1) = 1$

• si $x \in A \cap \bar{B}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$ et $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(1, 0) = 1$

• si $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 0$ et $\max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = \max(0, 0) = 0$

Dans tous les cas $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x))$ et ainsi $\boxed{\mathbb{1}_{A \cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)}$

3) (non corrigée)

Ex 5 : (non corrigée)

Ex 6 : (non corrigée)

Ex 7 : (non corrigée)

$\boxed{\text{Extrait du sujet G2E 2025}}$

Partie A.

1) a. La linéarité de $E(\cdot)$ donne $E(S) = E(X) + E(Y) + E(Z) + E(T)$ donc

$\boxed{\text{L'espérance de } S \text{ est égale à } x + y + z + t}$

Les variables sont mutuellement indépendantes donc $V(S) = V(X) + V(Y) + V(Z) + V(T)$ donc

$\boxed{\text{La variance de } S \text{ est égale à } x(1-x) + y(1-y) + z(1-z) + t(1-t)}$

b. P est le produit de variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc P aussi et P suit une loi de Bernoulli.

de plus $(P = 1) = (X = 1) \cap (Y = 1) \cap (Z = 1) \cap (T = 1)$ et les variables sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{P}(P = 1) = xyz t$

$\boxed{P \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } xyz t}$

- 2) a. M est la valeur maximale prise par des variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc M aussi et M suit une loi de Bernoulli.
de plus $(M = 0) = (X = 0) \cap (Y = 0) \cap (Z = 0) \cap (T = 0)$ et les variables sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{P}(M = 0) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t)$

$$M \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } 1 - (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t)$$

m est la valeur minimale prise par des variables qui prennent pour valeurs 0 ou 1, donc m aussi et m suit une loi de Bernoulli.

de plus $(N = 1) = (X = 1) \cap (Y = 1) \cap (Z = 1) \cap (T = 1)$ et les variables sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{P}(N = 1) = xyz t$

$$N \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } xyz t$$

- b. On sait $P((M = 0) \cap (N = 1)) = 0$ donc si M et N sont indépendantes alors $\mathbb{P}(M = 0) = 0$ ou $\mathbb{P}(N = 1) = 0$

donc nécessairement M est certaine égale à 1 ou N est certaine égale à 0.

Réciproquement, si une de ces deux variables aléatoires est certaine alors elles sont indépendantes.

de plus M est certaine égale à 1 si, et seulement si, $x = 1$ ou $y = 1$ ou $z = 1$ ou $t = 1$

et N est certaine égale à 0 si, et seulement si, $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$ ou $t = 0$

En conclusion :

$$M \text{ et } N \text{ sont indépendantes si, et seulement si, } (x, y, z, t) \notin]0, 1[^4$$

Partie B.

- 3) On note X_i (resp. Y_i , Z_i et T_i) la variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur 1 si, et seulement si, l'expérience menée par Xavière (resp. Yasmine, Zélie et Tina) sur l'échantillon i .

- a. $A_i = (X_i = 1) \cap (Y_i = 1) \cap (Z_i = 1) \cap (T_i = 1)$ et ces 4 variables sont mutuellement indépendantes donc

$$P(A_i) = xyz t$$

- b. $\mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$ est le nombre d'échantillons pour lesquels les quatre expériences ont été non concluantes

$\mathbb{1}_{A_i}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $xyz t$ et les variables $(\mathbb{1}_{A_i})_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes.

$$\text{donc } \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n} \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, xyz t)$$

- c. En notant $U = \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$ on cherche ici $\mathbb{P}(U = 1)$ et comme $U \sim \mathcal{B}(n, xyz t)$ il vient :

$$\text{La probabilité demandée est égale à : } nxyz t(1 - xyz t)^{n-1}$$

- 4) Autrement dit : B_i : "au i ème échantillon les 4 expériences sont non toutes concluantes"

- a. $\mathbb{1}_{B_1} + \dots + \mathbb{1}_{B_n}$ est le nombre d'échantillons pour lesquels les quatre expériences sont non toutes concluantes

Remarque : $\overline{B_i}$: "au i ème échantillon les 4 expériences sont toutes concluantes"

- b. On note $V = \mathbb{1}_{B_1} + \dots + \mathbb{1}_{B_n}$ et on remarque que : $P(\overline{B_i}) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t)$

V suit la loi binomiale de paramètres $(n, 1 - (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t))$ et on veut $P(V \leq \frac{n}{2})$

donc

$$\text{La probabilité recherchée est : } \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \left(1 - (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t)\right)^k \left((1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t)\right)^{n-k}$$