Correction de la feuille_Cours_5_3 : Variables aléatoires discrètes. Lois usuelles dénombrables.

La loi géométrique. *(Temps d'attente, une loi sans mémoire)*

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad (X = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T}_i \right) \bigcap T_k$

3) L'indépendance des lancers permet d'en déduire que $P(X = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{T}_i) \right) \times P(T_k)$

or $P(T_i) = p$ donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p}$

4) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$ donc X est une variable aléatoire discrète bien définie.

5) • Avec la situation type : $[X > k]$: "Les m premières épreuves donne un échec" donc $P\Big([X > k] \Big) = q^k$

• Avec un calcul : Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P\Big([X > k] \Big) &= 1 - P\Big([X \leqslant k] \Big) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k} P\Big([X = i] \Big) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k} pq^{i-1} \\ &= 1 - p\,\frac{1-q^k}{1-q} \\ &= q^k \end{aligned}$$

La relation est envore vraie pour $k = 0$, donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P\Big([X > k] \Big) = q^k}$

6) X admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

or $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |x_n| P(X = x_n) = \sum_{n \geqslant 1} n(1-p)^{n-1}p$ qui est une série géométrique dérivée qui converge

donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}p \\ &= p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \\ &= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

Remarque :

En lançant indéfiniment un dé, le nombre moyen de lancers pour obtenir le premier ❶ est égal à 6.

c'est l'inverse de $\frac{1}{6}$

En lançant indéfiniment une pièce, le nombre moyen de lancers pour obtenir un Pile est égal à 2.

c'est l'inverse de $\frac{1}{2}$

7) *(théorème de transfert)*

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n^2 P(X=x_n)$ est absolument convergente.

si, et seulement si, $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n^2 P(X=x_n)$ est convergente. (car $x_n^2 \geqslant 0$)

(Simplifions les sommes partielles, puis faisons tendre n vers $+\infty$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 P(X=x_k) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 p q^{k-1}\\ &= pq\sum_{k=1}^{n} k(k-1)q^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k q^{k-1}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} pq\times\frac{2}{p^3}+\frac{p}{p^2}\end{aligned}$$

donc $E(X^2)$ existe et $E(X^2)=\dfrac{2q+p}{p^2}$

on en déduit *(formule Kœnig-Huygens)* que X admet une variance et

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2)-E(X)^2\\ &= \frac{2q+p}{p^2}-\frac{1}{p^2}\\ &= \frac{2q+p-1}{p^2}\\ &= \frac{2q-q}{p^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X)=\frac{q}{p^2}}$$

8) *(Non fait en classe)* : $\quad P\Big([X=n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=\dfrac{P\Big([X=n+k]\cap[X>k]\Big)}{P\Big([X>k]\Big)}$

or $\quad n\geqslant 0 \quad$ donc $[X=n+k]\subset[X>k]$ $\quad$ et ainsi $[X=n+k]\cap[X>k]=[X=n+k]$ et

$$P\Big([X=n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=\frac{P\Big([X=n+k]\Big)}{P\Big([X>k]\Big)}$$

donc $P\Big([X>k]\Big)=q^k$ et $P\Big([X=n+k]\Big)=pq^{n+k-1}$, donc $\quad P\Big([X=n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=pq^{n-1}$

en conclusion on a bien : $\boxed{\forall (k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\quad P\Big([X=n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=P(\,[X=n]\,)}$

9) *Avec la situation type :*

Si on sait que de 1 à k il n'y a eu que des échecs,

le temps d'attente du premier succès suit la même loi qu'au début de l'expérience.

10) Par définition *(de la probabilité conditionnelle)* : $\quad P\Big([X>n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=\dfrac{P\Big([X>n+k]\cap[X>k]\Big)}{P\Big([X>k]\Big)}$

or $\quad n\geqslant 0 \quad$ donc $[X>n+k]\subset[X>k]$ $\quad$ et ainsi $[X>n+k]\cap[X>k]=[X>n+k]$ et

$$P\Big([X>n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=\frac{P\Big([X>n+k]\Big)}{P\Big([X>k]\Big)}$$

or $\underbrace{P\Big([X>k]\Big)=q^k}_{\text{vu à la question 7)}}$ et $P\Big([X>n+k]\Big)=q^{n+k}$, donc $\quad P\Big([X>n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=q^n$,

en conclusion on a bien :

$$\boxed{\forall (k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\quad P\Big([X>n+k]\,\big|\,[X>k]\Big)=P(\,[X>n]\,)}$$

11) *(non corrigé)*

Loi de Poisson.

1) Cette expérience est constituée de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes *(Succès : A réalisé dans l'intervalle, avec une probabilité de p_n)* et X_n est le nombre de succès donc

$$\boxed{X_n \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, p_n)}$$

2) L'espérance de X_n est égale à np_n.

3) $E(X_n) = \lambda \iff p_n = \dfrac{\lambda}{n}$.

$$\boxed{\text{si on veut que } E(X_n) = \lambda, \text{ il faut prendre } p_n = \frac{\lambda}{n}}$$

4) Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $(u_n)_{n \geqslant k}$ la suite définie par $u_n = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$,

a. On sait que si $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$$

donc

$$\boxed{\text{pour } k \text{ fixé,} \quad \binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}}$$

b. k fixé,

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to1} x^k = 1$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k = 1}$
- $\displaystyle\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)$ or $\displaystyle\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \sim -\frac{\lambda}{n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to-\lambda} e^x = e^{-\lambda}$ on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}}$

c. Pour $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned}
u_n &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} && \textit{d'après 4)a.} \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n && \textit{d'après 4)b.} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$$

5) a. $X(\Omega) = \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \geqslant 0$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \times e^{\lambda} && \text{série exponentielle} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien défini une variable aléatoire discrète.}}$$

b. Calcul de l'espérance d'une VAR suivant une loi de Poisson.

Rédaction 1.

X admet une espérance si, et seulement si, $\sum\limits_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

or $\quad |x_n| P(X = x_n) = n \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \quad$ et $\quad \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ converge

donc $\underline{X \text{ admet une espérance}}$ et

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \lambda \, e^{-\lambda} e^{\lambda} \qquad \textit{série exponentielle}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

Rédaction 2.

X admet une espérance si, et seulement si, $\sum\limits_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

si, et seulement si, $\sum\limits_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est convergente. (car $x_n \geqslant 0$)

Utilisons les sommes partielles.
Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k P(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda \, e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda \, e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \textit{on réindice} \\
\textit{(on fait tendre } n \textit{ vers } +\infty\textit{)} \quad &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \, e^{-\lambda} \times e^{\lambda} \qquad \textit{somme partielle de la série exponentielle} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda
\end{aligned}$$

Donc $\underline{X \text{ admet une espérance}}$ et

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

c. **Rédaction 1.**

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X=x_n)$ est absolument convergente.

$$\text{or} \quad |x_n^2|P(X=x_n) = n^2\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \sim \lambda^2 e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \text{ et } \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \text{ converge}$$

donc *(théorème de transfert)* $\underline{X^2 \text{ admet une espérance}}$ et

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)+n)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \textit{(car les deux sommes existent)} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

donc *(formule Kœnig-Huygens)* X admet une variance et

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{V(X) = \lambda}$$

Rédaction 2.

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X=x_n)$ est absolument convergente.

si, et seulement si, $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X=x_n)$ est convergente. (car $x_n^2 \geqslant 0$)

Avec les sommes partielles.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} x_k^2 P(X=x_k) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \qquad \textit{(Série exponentielle)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

donc $\underline{X^2 \text{ admet une espérance}}$ et : $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

ainsi *(formule Kœnig-Huygens)* X admet une variance et

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{V(X) = \lambda}$$