Correction de la feuille_Cours_5 : Variables aléatoires discrètes. Espérance.

**Ex 1.** *(non corrigé)*

**Ex 2.** 1) $X(\Omega)$ est fini et $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} P(X=x_k) = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 1$

Donc $\boxed{X \text{ est correctement définie}}$

2) $X(\Omega)$ est fini et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X=x_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \neq 1,$

Donc $\boxed{X \text{ n'est pas correctement définie}}$

3) $X(\Omega) = \{(-1)^{n+1}n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable,

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(X=x_n) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{n+1}}$ est convergente ( série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in ]-1,1[$ )

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Donc $\boxed{X \text{ est correctement définie}}$

4) $X(\Omega)$ est dénombrable,

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(X=x_n) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{2^{n-1}}$ est convergente ( série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2} \in ]-1,1[$ )

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=x_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \neq 1$

Donc $\boxed{X \text{ n'est pas correctement définie}}$

5) $X(\Omega) = \{(n-2)^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $f : n \longmapsto (n-2)^2$ n'est pas injective *(En effet : $f(1) = f(3)$ )*

Donc $\boxed{X \text{ n'est pas correctement définie}}$

**Ex 3.** 1) $\Omega = [\![1,6]\!]^{100}$ est fini et la fonction $X$ est bien définie pour tout résultat de cette expérience,

Donc $\boxed{X \text{ est correctement définie}}$

2) Ici $X$ n'est pas définie pour les résultats ne donnant pas de ❻ .
En notant $E$ cet événement on a : $P(E) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \neq 0$

Donc $\boxed{X \text{ n'est pas correctement définie}}$

3) $\Omega = [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}}$ n'est pas fini,

on note $E$ l'événement : "l'ensemble des résultats où $X$ n'est pas définie".

On notant $S_k$ : " Obtenir ❻ au $k^{\text{ième}}$ lancer", on a : $E = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\overline{S}_n$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\overline{S}_n \subset \bigcap_{k=1}^{n}\overline{S}_k$ donc $0 \leqslant P(E) \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et en passant à la limite on obtient $P(E) = 0$.

Donc $\boxed{X \text{ est correctement définie}}$

**Remarque** *(de Suzanne en 2023)* :

Ici on sait calculer $P(X=n) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ donc on peut aussi montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

**Remarque** *(de Raphaël en 2023)* :

"C'est une situation type de la loi géometrique, donc on sait tous que c'est bien définie".

4) *(non corrigé)*

**Ex 4.** 1) $X(\Omega)$ est fini donc $X$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{6} x_k P(X = x_k) \\ &= -1 \times \frac{1}{2} + 0 + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{3}}$$

2) $X(\Omega)$ est fini donc $X$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} x_k P(X = x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} . \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}}$$

3) $X$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente

$$|x_n| P(X = x_n) = \frac{1}{n+1}$$

or $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ diverge. *(C'est la série harmonique)*

donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance espérance.}}$

4) $X$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente

$$|x_n| P(X = x_n) = n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

or $\sum_{n \geqslant 1} n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ converge. *(C'est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$)*

donc $\underline{X \text{ admet une espérance.}}$

et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} \qquad \textit{(série géométrique dérivée } \frac{1}{2} \in ]-1, 1[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{9}}$$

**Ex 5.** Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant M$ *(On traduit que X est borné)*

on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |x_n| P(X = x_n) \leqslant M P(X = x_n)$

et la série $\sum P(X = x_n)$ converge *(et sa somme vaut 1).*

donc *( théorème de convergence par comparaison)* $\sum |x_n| P(X = x_n)$ converge donc $X_n$ admet une espérance.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est bornée alors } X \text{ admet une espérance.}}$$

**Ex 6.** 1) $X(\Omega)$ est fini donc d'après le théorème de transfert $X^2$ admet une espérance et

$$E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{6} + (-1)^2 \times \frac{1}{6} + 0 + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6}$$

donc $\boxed{E(X^2) = \frac{19}{6}}$

2) $X(\Omega)$ est fini et $x \longmapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ est définie sur $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ donc *(d'après le théorème de transfert)*

$\dfrac{1}{X(X+1)}$ admet une espérance

et

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X(X+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E\left(\frac{1}{X(X+1)}\right) = \frac{1}{n+1}}$$

3) $X(1-X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum\limits_{n \geqslant 0} x_n(1 - x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente.

or $\quad |x_n(1 - x_n)| P(X = x_n) = n(n-1) \dfrac{3}{4^{n+1}} = -\dfrac{3}{4^3} n(n-1) \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}$

et $\quad \sum\limits_{n \geqslant 0} n(n-1) \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}$ converge *(série dérivée d'ordre 2 et de raison* $\frac{1}{4} \in ]-1, 1[$*)*

donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} x_n(1 - x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente

et ainsi *(théorème de transfert)* $\boxed{X(1-X) \text{ admet une espérance}}$ et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(1 - x_n) P(X = x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-n) \frac{3}{4^{n+1}} \\ &= -\frac{3}{4^3} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{4^{n-2}} \\ &= -\frac{3}{4^3} \frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = -\frac{2}{9}}$$

4) *(non corrigé)*