

Correction de la feuille_Cours_5.2 : Variables aléatoires discrètes. Variance.

Ex 1 : 1) • si $x \in [-1; 1]$ alors $|x| \leq 1$ donc $|x| \leq 1 + x^2$ (car $0 \leq x^2$).

• si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ alors $|x| \geq 1$ donc $|x|^2 \geq |x|$ et ainsi : $|x| \leq 1 + x^2$

En conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1 + x^2$

2) On note $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

X admet une espérance si, et seulement si $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

L'égalité précédente donne $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq 1 + x_n^2$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |x_n|P(X = x_n) \leq P(X = x_n) + x_n^2 P(X = x_n)$$

or : $\sum_{n \geq 0} \left(P(X = x_n) + x_n^2 P(X = x_n) \right)$ converge (En effet : $\sum P(X = x_n)$ CV $\sum x_n^2 P(X = x_n)$ CV ($E(X^2)$ existe))

donc (Théorème de convergence par comparaison)

$\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente et ainsi X admet une espérance.

En conclusion :

Si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance

Ex 2 : 1) $X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{3} + 0 + 1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{6} + (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 0 + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

(Théorème de transfert)

or (formule Kœnig-Huygens) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ donc $V(X) = \frac{4}{3} - \frac{1}{9} = \frac{11}{9}$

2) $X(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini donc X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p \text{ donc } \boxed{E(X) = p} \quad \text{et} \quad E(X^2) = 0 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

donc (avec la formule Kœnig-Huygens) $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$

3) a. $X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et une variance.

On rappelle que $E(X) = \frac{n}{2}$ et

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \times P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

donc (avec la formule Kœnig-Huygens)

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} \\ &= \frac{n}{2} \left(\frac{4n+2-3n}{6} \right) \end{aligned}$$

$V(X) = \frac{n^2 + 2n}{12}$

b. X suit la loi uniforme sur $\llbracket a; b \rrbracket$.

En notant $Y = X - a$, on a : $Y \hookrightarrow \llbracket 0; b-a \rrbracket$

(En effet $Y(\Omega) = \llbracket 0; b-a \rrbracket$ et toutes les valeurs sont équiprobables)

on a $X = Y + a$ donc (linéarité) $E(X) = E(Y) + a$

or d'après 3)a. $E(Y) = \frac{b-a}{2}$ donc $E(X) = \frac{a+b}{2}$

on a $X = Y + a$ donc (comme $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$) $V(X) = V(Y)$

or d'après 3)a. $V(Y) = \frac{(b-a)^2 + 2(b-a)}{12}$ donc $V(X) = \frac{(b-a)^2 + 2(b-a)}{12}$

ou encore

$$V(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

4) $X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et $E(X) = \sum_{k=0}^n kP(X=k)$ donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} && (\text{On a enlevé le terme pour } k=0 \text{ car il est nul}) \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} && (\text{formule d'absorption, du chef, du capitaine, ...}) \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-k-1} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} \\ &= np(p+q)^{n-1} \end{aligned}$$

$$E(X) = np$$

$X(\Omega)$ est fini donc X^2 admet une espérance et (théorème de transfert)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 P(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1)P(X=k) + \sum_{k=0}^n kP(X=k) && (\text{On a enlevé le terme pour } k=0,1 \text{ car ils sont nuls}) \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + np && (\text{on reconnaît la formule de l'espérance}) \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} + np && (\text{double formule du chef}) \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} q^{n-k-2} + np && (\text{on réindice}) \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k q^{n-2-k} + np \\ &= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np \\ &= n(n-1)p^2 + np \end{aligned}$$

donc (Formule de Koenig-Huygens) X admet une variance et

$$\begin{aligned} V(X) &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= -np^2 + np \end{aligned}$$

$$V(X) = np(1-p)$$

5) a. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$ donc X est une variable aléatoire discrète bien définie.

b. X admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geq 1} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

or $\sum_{n \geq 1} |x_n| P(X = x_n) = \sum_{n \geq 1} n(1-p)^{n-1} p$ qui est une série géométrique dérivée qui converge

donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} p \\ &= p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \\ &= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

c. (théorème de transfert)

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geq 1} x_n^2 P(X = x_n)$ est absolument convergente.

si, et seulement si, $\sum_{n \geq 1} x_n^2 P(X = x_n)$ est convergente. (car $x_n^2 \geq 0$)

(Simplifions les sommes partielles, puis faisons tendre n vers $+\infty$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k^2 P(X = x_k) &= \sum_{k=1}^n k^2 p q^{k-1} \\ &= p q \sum_{k=1}^n k(k-1) q^{k-2} + p \sum_{k=1}^n k q^{k-1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p q \times \frac{2}{p^3} + \frac{p}{p^2} \end{aligned}$$

donc $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = \frac{2q+p}{p^2}$

on en déduit (formule Kœnig-Huygens) que X admet une variance et

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{2q+p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{2q+p-1}{p^2} \\ &= \frac{2q-q}{p^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}}$$

6) a. $X(\Omega) = \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \geq 0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \times e^{\lambda} \quad \text{série exponentielle} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

On a bien défini une variable aléatoire discrète.

- b. X admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geq 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.
 si, et seulement si, $\sum_{n \geq 0} x_n P(X = x_n)$ est convergente. (car $x_n \geq 0$)

Utilisons les sommes partielles.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k P(X = k) &= \sum_{k=0}^n k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{on réindice} \\ (on fait tendre n vers +\infty) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\lambda} \times e^{\lambda} \quad \text{somme partielle de la série exponentielle} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \end{aligned}$$

Donc X admet une espérance et

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

- c. X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geq 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est absolument convergente.
 si, et seulement si, $\sum_{n \geq 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est convergente. (car $x_n^2 \geq 0$)

Avec les sommes partielles.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n x_k^2 P(X = x_k) &= \sum_{k=0}^n k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^n \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} \quad (\text{Série exponentielle}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

donc X^2 admet une espérance et : $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

ainsi (formule Kœnig-Huygens) X admet une variance et

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{V(X) = \lambda}$$

Ex 3 : (non corrigé)