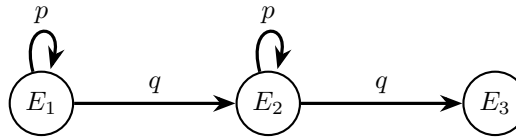
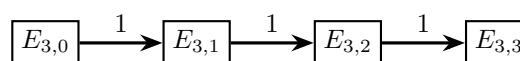
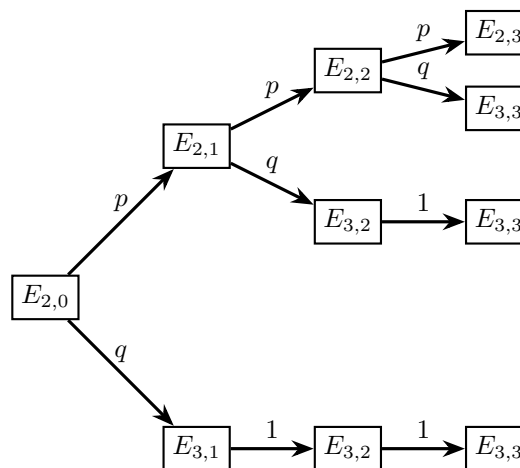
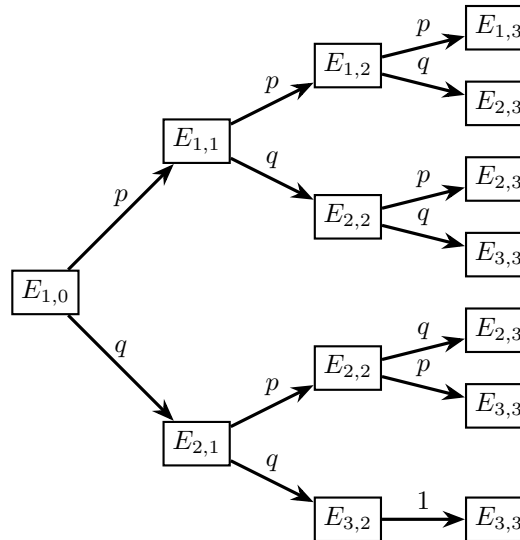


Correction de la feuille_Exo_6 : Autour des chaînes de Markov.

Ex 1 : 1)



2) Des événements sur les noeuds et des probabilités conditionnelles sur les arrêtes.

3) La formule des probabilité totales avec le système complet : $(E_{1,k}, E_{2,k}, E_{3,k})$ donne :

$$P(E_{1,k+1}) = P(E_{1,k})P_{E_{1,k}}(E_{1,k+1}) + P(E_{2,k})P_{E_{2,k}}(E_{1,k+1}) + P(E_{3,k})P_{E_{3,k}}(E_{1,k+1})$$

ou encore

$$P(E_{1,k+1}) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

En raisonnant ligne par ligne on obtient :

$$P(E_{2,k+1}) = \begin{pmatrix} q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

$$P(E_{3,k+1}) = \begin{pmatrix} 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

En prenant $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}$ on a bien : $\begin{pmatrix} P(E_{1,k+1}) \\ P(E_{2,k+1}) \\ P(E_{3,k+1}) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$

On remarque :

$$\begin{pmatrix} P(E_{1,k+1}) \\ P(E_{2,k+1}) \\ P(E_{3,k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{E_{j,k}}(E_{i,k+1}))_{1 \leq i,j \leq 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

4) En passant à la transposée sur la relation précédente on obtient :

$$\begin{pmatrix} P(E_{1,k+1}) & P(E_{2,k+1}) & P(E_{3,k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) & P(E_{2,k}) & P(E_{3,k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) On note $X_k = \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$.

La question 3) à montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = AX_k$,

on en déduit par un raisonnement par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k = A^k X_0$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} P(E_{1,0}) \\ P(E_{2,0}) \\ P(E_{3,0}) \end{pmatrix}.$$

6) On raisonne comme dans la question 1) sur chaque ligne i on a : (*formule des probabilités totales*)

$$P(E_{i,k}) = \begin{pmatrix} P_{E_{1,0}}(E_{i,k}) & P_{E_{2,0}}(E_{i,k}) & P_{E_{3,0}}(E_{i,k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,0}) \\ P(E_{2,0}) \\ P(E_{3,0}) \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{E_{j,0}}(E_{i,k}))_{1 \leq i,j \leq 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,0}) \\ P(E_{2,0}) \\ P(E_{3,0}) \end{pmatrix}$$

7) On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k = A^k X_0 \quad \text{et} \quad X_k = \left((P_{E_{j,0}}(E_{i,k}))_{1 \leq i,j \leq 3} \right) X_0$.

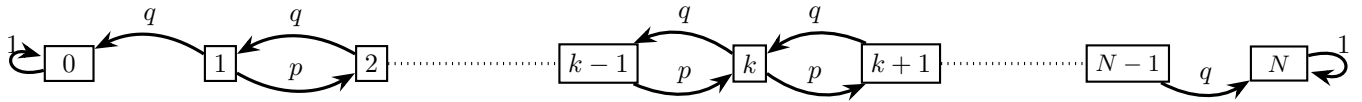
Ces relations sont vraies quelle que soit la matrice X_0 donc

Pour tout $(i,j), \quad (A^k)_{i,j} = P_{E_{j,0}}(E_{i,k})$

$(A^k)_{i,j}$ est la probabilité que le système soit dans l'état E_i après k heures sachant qu'il était en E_j à l'instant initial.

Ex 2 : La ruine du joueur

1)



2) En appliquant pour chaque ligne **la formule des probabilités totales** avec le système complet :
 $((X_n = k))_{0 \leq k \leq N}$

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ \vdots \\ P(X_{n+1} = N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & & & 0 \\ 0 & p & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & q & 0 \\ \vdots & & & \ddots & p & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$$

Plus précisément :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^N P(X_{n+1} = i | X_n = j) \times P(X_n = j)$$

• Pour $i = 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) \times P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) \times P(X_n = 1) \\ &= P(X_n = 0) + qP(X_n = 1) \end{aligned}$$

on obtient la première ligne,

• Pour $i = 1$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) \times P(X_n = 2) \\ &= qP(X_n = 2) \end{aligned}$$

on obtient la deuxième ligne,

• Pour $i = 2$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) \times P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 2 | X_n = 3) \times P(X_n = 3) \\ &= pP(X_n = 1) + qP(X_n = 3) \end{aligned}$$

on obtient la troisième ligne,

On raisonne ainsi de suite pour avoir le reste de la matrice

On peut raisonner autrement : (en colonnes)

La $j + 1$ ième colonne de cette matrice est la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n = j)$.

• Si $j = 0$ (ruine) :

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1, \quad P(X_{n+1} = i | X_n = 0) = 0 \text{ pour } i \neq 0.$$

• Si $j = N$ (gain total) :

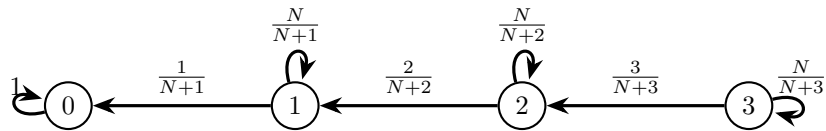
$$P(X_{n+1} = N | X_n = N) = 1, \quad P(X_{n+1} = i | X_n = N) = 0 \text{ pour } i \neq N.$$

• Si $1 \leq j \leq N - 1$:

$$P(X_{n+1} = j - 1 | X_n = j) = q, \quad P(X_{n+1} = j + 1 | X_n = j) = p, \quad P(X_{n+1} = i | X_n = 0) = 0 \text{ sinon.}$$

On obtient ainsi toute la matrice

Ex 3 :



- 1) En appliquant pour chaque ligne la formule des probabilités totales avec le système complet : $(E_{k,n})_{0 \leq k \leq 3}$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{N+1} & \frac{2}{N+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{N+2} & \frac{3}{N+3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{N+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

- 2) (question avec des calculs pas simples)

On trouve :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} n+2 \\ -2(n+1) \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} (n+3)^2 \\ -3(n+1)(n+3) \\ 3n(n+2) \\ -n \end{pmatrix}$$

- 3) Des idées, mais je en vois pas d'approche avec des calculs raisonnables.

On remarque que C_0, C_1, C_2 et C_3 forment une base de vecteurs propres de M .

On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (C_0, C_1, C_2, C_3) .

On a alors $MP = P\Delta$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{N+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{N+3} \end{pmatrix}$ on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{N}{N+1}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{N}{N+2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{N}{N+3}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex 4 : (non corrigé)

Ex 5 : (non corrigé)