

SUJET 6

Travail demandé

Les candidats doivent étudier puis présenter le dossier joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraissent pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales

Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligence ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs. . .) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

Ils peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

Les documents fournis peuvent être annotés. Ils seront récupérés, ainsi que vos supports d'exposé, à l'issue de l'examen. Il est important que les candidats sachent que leurs éventuelles annotations ne seront pas lues par l'examinateur et ne seront donc pas prises en compte pour la notation.

Remarques particulières

1. Une relation \mathcal{R} sur un ensemble E est un sous-ensemble X du produit cartésien $E \times E$. Si $(x, y) \in X$ on note $x\mathcal{R}y$.

Une relation d'ordre \leq sur un ensemble E est une relation vérifiant les axiomes suivants:

- pour tout $x \in E$, $x \leq x$ (réflexivité),
- pour tous $x, y \in E$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (antisymétrie),
- pour tous $x, y, z \in E$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (transitivité).

2. L'auteur note $E - A$ le complémentaire de A dans E .

ESPACES MÉTRIQUES

Dans Ce chapitre

nous

développons le langage géométrique en lequel sont actuellement exprimés les résultats de l'Analyse et qui a permis de donner à ces résultats leur entière généralité et de les démontrer de la manière la plus simple et la plus élégante. La plupart des notions introduites dans ce chapitre ont une signification très intuitive lorsqu'on se restreint au cas particulier de l'espace à trois dimensions; après s'être habitué à leur emploi, aussi bien dans les problèmes que dans les chapitres suivants, l'étudiant devrait être convaincu qu'avec des précautions convenables, cette intuition est, en somme, un guide extrêmement sûr, et qu'il serait dommage de la limiter à son domaine classique d'application.

Il n'y a presque pas de véritables théorèmes dans ce chapitre; la plupart des résultats découlent directement des définitions et ceux qui sont un peu plus difficiles ne sont jamais très profonds. Les sections 3.1 à 3.9 sont essentiellement consacrées à établir la terminologie; elle peut paraître très abondante au lecteur non préparé, particulièrement dans les sections 3.5 à 3.8 qui sont, en réalité, des manières différentes d'exprimer les mêmes choses; on doit chercher les raisons de cette surabondance dans les applications: s'en passer (comme on pourrait théoriquement le faire) conduirait souvent à des circonlocutions pénibles, et il vaut la peine de charger la mémoire de quelques termes supplémentaires s'il en résulte une plus grande clarté.

1. Distances et espaces métriques

Soit E un ensemble. Une *distance sur* E est une application d de $E \times E$ dans l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels, possédant les propriétés suivantes :

- (I) $d(x, y) \geq 0$ pour tout couple d'éléments x, y de E .
- (II) La relation $d(x, y) = 0$ est équivalente à $x = y$.
- (III) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout couple d'éléments de E .
- (IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ quels que soient les trois éléments x, y, z de E (*inégalité du triangle*).

On déduit de (IV), par récurrence, que

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

pour tout $n > 2$.

(3.1.1) Si d est une distance sur E , alors

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

quels que soient les trois éléments x, y, z , de E .

En effet, on déduit successivement de (III) et (IV) :

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(y, z) + d(x, y) \\ d(y, z) &\leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z) \\ -d(x, y) &\leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y). \end{aligned}$$

Un *espace métrique* est un ensemble E sur lequel est donnée une distance d .

2. Exemples de distances

(3.2.1) La fonction $(x, y) \rightarrow |x - y|$ est une distance sur l'ensemble des nombres réels, l'espace métrique correspondant est appelé *la droite réelle*. Lorsque \mathbf{R} est considéré comme un espace métrique, sans mention explicite d'une distance, il est toujours sous-entendu que la distance est celle qui vient d'être définie.

(3.2.2) Dans l'espace usuel à trois dimensions $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, la «distance euclidienne» usuelle définie par

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

pour deux éléments $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ vérifie trivialement les axiomes (I), (II) et (III); (IV) se vérifie par un calcul direct.

(3.2.3) Dans le «plan réel» $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, définissons

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

pour deux éléments $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$; les axiomes (I), (II), (III) sont, de nouveau, trivialement vérifiés, tandis que (IV) résulte de (2.2.10).

(3.2.4) Soient A un ensemble, $E = \mathcal{B}(A)$ l'ensemble des applications bornées de A dans \mathbf{R} . Alors, quelles que soient les deux fonctions f, g de E , $f - g$ appartient aussi à E , et le nombre

$$d(f, g) = \sup_{t \in A} |f(t) - g(t)|$$

est défini. L'application $(f, g) \rightarrow d(f, g)$ est une distance sur E ; car (I) et (III) sont trivialement vérifiés et (IV) également.

; d'autre part, si $d(f, g) = 0$, alors $f(t) - g(t) = 0$ pour tout $t \in A$, c'est-à-dire $f = g$ d'où (II).

(3.2.5) Soit E un ensemble arbitraire, et posons $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, $d(x, x) = 0$. Alors (I), (II) et (III) sont vérifiés; (IV) est immédiat si deux des trois éléments x, y, z , sont égaux; sinon, on a $d(x, z) = 1$, $d(x, y) + d(y, z) = 2$, donc (IV) est vérifié dans tous les cas. L'espace métrique correspondant défini sur E par cette distance est appelé un espace métrique discret.

(3.2.6) Soit p un nombre premier; pour tout entier naturel $n > 0$, définissons $v_p(n)$ comme l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Il résulte immédiatement de cette définition que

$$(3.2.6.1) \quad v_p(nm') = v_p(n) + v_p(m')$$

pour tout couple d'entiers > 0 . Soit alors $x = \pm r/s$ un nombre rationnel quelconque $\neq 0$, avec r et s entiers > 0 ; posons $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$; cette définition ne dépend pas de la représentation de x par une fraction particulière, comme le montre (3.2.6.1); cette même relation montre aussi que

$$(3.2.6.2) \quad v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

pour tout couple de nombres rationnels $\neq 0$. Posons maintenant pour tout couple de nombres rationnels x, y , $d(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$ si $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$; nous allons montrer que c'est une *distance* (appelée *distance p-adique*) sur l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels. Les axiomes (I), (II) et (III) résultent immédiatement de la définition. De plus, montrons que nous avons un peu plus que l'axiome (IV), à savoir

$$(3.2.6.3) \quad d(x, z) \leq \text{Max}(d(x, y), d(y, z)).$$

Comme cette inégalité est évidente lorsque deux des éléments x, y, z sont égaux, nous pouvons supposer qu'ils sont tous distincts, et alors nous devons montrer que pour tout couple de nombres rationnels x, y , tels que $x \neq 0, y \neq 0$ et $x - y \neq 0$, on a

$$(3.2.6.4) \quad v_p(x - y) \geq \text{Min}(v_p(x), v_p(y)).$$

Nous pouvons supposer $v_p(x) \geq v_p(y)$; utilisant (3.2.6.2), la relation à démontrer se réduit à

$$(3.2.6.5) \quad v_p(z - 1) \geq 0$$

pour tout nombre rationnel z , tel que $z \neq 0, z \neq 1$ et $v_p(z) \geq 0$. Mais alors, par définition, $z = \pm p^{hr}/s$, avec $h \geq 0, r$ et s non divisibles par p ; comme $z - 1$ a un dénominateur qui n'est pas divisible par p , (3.2.6.5) résulte de la définition de v_p .

3. Isométries

Soient E, E' deux espaces métriques, d, d' les distances sur E et E' . Une bijection f de E sur E' est appelée une *isométrie* si

$$(3.3.1) \quad d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

pour tout couple d'éléments de E ; l'application inverse f^{-1} est alors une isométrie de E' sur E . Deux espaces métriques sont *isométriques* s'il existe une isométrie de E sur E' . Tout théorème démontré dans E et *concernant seulement les distances* entre les éléments de E , donne immédiatement, dans tout espace isométrique E' , un théorème analogue relatif aux distances des images par f des éléments de E qui interviennent dans le théorème.

Soient maintenant E un espace métrique, d la distance sur E et f une bijection de E sur un ensemble E' (sur lequel aucune distance n'est supposée

définie au préalable); nous pouvons définir une distance d' sur E' par la formule (3.3.1) et f est alors une isométrie de E sur E' . On dit que la distance d' a été transportée de E sur E' par f .

(3.3.2) Exemple : La droite réelle achevée $\bar{\mathbf{R}}$. La fonction f définie dans \mathbf{R} par $f(x) = x/(1 + |x|)$ est une bijection de \mathbf{R} sur l'intervalle ouvert $I =]-1, +1[$, l'application inverse g étant définie par $g(x) = x/(1 - |x|)$ pour $|x| < 1$. Soit J l'intervalle fermé $[-1, +1]$ et soit $\bar{\mathbf{R}}$ l'ensemble qui est la réunion de \mathbf{R} et de deux nouveaux éléments écrits $+\infty$ et $-\infty$ (points à l'infini); on prolonge f en une bijection de $\bar{\mathbf{R}}$ sur J en posant $f(+\infty) = +1$ et $f(-\infty) = -1$; appelons encore g l'application inverse. Comme J est un espace métrique pour la distance $|x - y|$, nous pouvons appliquer le procédé décrit plus haut pour définir $\bar{\mathbf{R}}$ comme un espace métrique, en posant $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Muni de cette distance (qui appliquée à deux éléments de \mathbf{R} , est différente de celle définie dans (3.2.1)) l'espace métrique $\bar{\mathbf{R}}$ est appelé droite réelle achevée; notons que pour $x \geq 0$, $d(+\infty, x) = 1/(1 + |x|)$ et pour $x \leq 0$, $d(-\infty, x) = 1/(1 + |x|)$.

On peut définir une relation d'ordre sur $\bar{\mathbf{R}}$, en définissant $x \leq y$ comme l'équivalent de $f(x) \leq f(y)$; il est facile de vérifier que, pour x, y dans \mathbf{R} , celle-ci est équivalente à la relation d'ordre déjà définie sur \mathbf{R} , et que nous avons en outre $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}$; les nombres réels sont aussi appelés les éléments finis de $\bar{\mathbf{R}}$. Toutes les propriétés et définitions, qui font seulement intervenir la relation d'ordre (à l'exclusion de toute propriété où figurent les opérations algébriques) peuvent immédiatement être « transportées » à $\bar{\mathbf{R}}$ par l'application g . Un sous-ensemble non vide A de $\bar{\mathbf{R}}$ est toujours borné pour cette relation d'ordre, et par suite $\sup A$ et $\inf A$ sont définies, mais peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$ aussi bien que des nombres réels. La définition de $\sup_{x \in A} u(x)$ et de $\inf_{x \in A} u(x)$ (pour toute application u d'un ensemble A dans $\bar{\mathbf{R}}$) est donnée de la même manière,

4. Boules, sphères, diamètre

Dans la théorie des espaces métriques, il est extrêmement commode d'utiliser un langage géométrique inspiré de la géométrie classique. Ainsi les éléments d'un espace métrique seront, en général, appelés des points. Étant donné un espace métrique E , avec une distance d , un point $a \in E$, et un nombre réel $r > 0$, la boule ouverte (resp. boule fermée, sphère) de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$ (resp.

$B'(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}$, $S(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$. Les boules ouvertes et les boules fermées de centre a contiennent toujours le point a , mais une sphère de centre a peut être vide (pour des exemples de propriétés étranges que peuvent posséder les boules d'un espace métrique général, voir problème 4, section 3.8).

Exemples. Sur la droite réelle, une boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r est l'intervalle $]a - r, a + r[$ (resp. $[a - r, a + r]$); la sphère de centre a et de rayon r est réduite aux deux points $a - r$ et $a + r$. Dans la droite réelle achevée $\bar{\mathbf{R}}$, une boule ouverte de centre $+\infty$ et de rayon $r < 1$ est l'intervalle $](1 - r)/r, +\infty[$. Dans un espace discret E , une boule (ouverte ou fermée) de centre a et de rayon $r < 1$ est réduite à a et la sphère correspondante est vide; si, au contraire $r \geq 1$, $B(a; r) = B'(a; r) = E$ et $S(a; r) = \emptyset$ si $r > 1$, $S(a; r) = E - \{a\}$ si $r = 1$.

Soient A, B deux sous-ensembles non vides de E ; la *distance de A à B* est, par définition, le nombre positif $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$. Lorsque

A est réduit à un seul point, $d(A, B)$ s'écrit aussi $d(x, B)$; nous avons,

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B). \text{ Si } A \cap B = \emptyset, d(A, B) = 0, \text{ mais}$$

la réciproque n'est pas nécessairement vérifiée; plus généralement, si $d(A, B) = a$, il n'existe pas nécessairement de couple de points $x \in A, y \in B$, tels que $d(x, y) = a$. Par exemple, sur la droite réelle \mathbf{R} , soit A l'ensemble des entiers ≥ 1 , et soit B l'ensemble des nombres de la forme $n - 1/n$ pour tous les entiers $n \geq 2$; A et B n'ont pas de points communs, mais $d(n, n - 1/n) = 1/n$ est arbitrairement petite, donc $d(A, B) = 0$

(3.4.1) *Si un point x n'appartient pas à une boule $B(a; r)$ (resp. $B'(a; r)$), alors $d(x, B(a; r)) \geq d(a, x) - r$ (resp. $d(x, B'(a; r)) \geq d(a, x) - r$).*

En effet, l'hypothèse implique que $d(a, x) \geq r$; pour tout $y \in B(a; r)$ (resp. $y \in B'(a; r)$), $d(x, y) \geq d(a, x) - d(a, y) \geq d(a, x) - r$ d'après l'inégalité du triangle.

(3.4.2) *Si A est un sous-ensemble non vide de E , x, y deux points de E*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

En effet, pour tout $z \in A$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, donc

$$\begin{aligned} d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) &\leq \inf_{z \in A} (d(x, y) + d(y, z)) = d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = \\ &= d(x, y) + d(y, A). \end{aligned}$$

De la même façon, on a $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$.

Pour tout ensemble non vide A dans E , le *diamètre* de A est, par définition, $\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x, y)$; c'est un nombre réel positif, ou bien $+\infty$; $A \subset B$ implique $\delta(A) \leq \delta(B)$. La relation $\delta(A) = 0$ a lieu si et seulement si A est réduit à un seul point.

(3.4.3) *Pour toute boule, $\delta(B'(a; r)) \leq 2r$.*

Car, si $d(a, x) \leq r$ et $d(a, y) \leq r$, $d(x, y) \leq 2r$ d'après l'inégalité du triangle.

Un *ensemble borné* dans E est un ensemble non vide dont le diamètre est fini. L'espace entier E peut être borné comme le montre l'exemple de la droite réelle achevée $\bar{\mathbb{R}}$. Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble borné est borné.

(3.4.4) *La réunion de deux ensembles bornés A, B est bornée.*

En effet, si $a \in A$, $b \in B$, et si x, y sont deux points quelconques de $A \cup B$, ou bien x et y sont dans A et alors $d(x, y) \leq \delta(A)$, ou bien ils sont dans B et $d(x, y) \leq \delta(B)$, ou bien, par exemple $x \in A$ et $y \in B$ et alors $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$, d'après l'inégalité du triangle, d'où

$$\delta(A \cup B) \leq d(a, b) + \delta(A) + \delta(B);$$

ceci étant vrai quels que soient $a \in A$, $b \in B$, on a

$$\delta(A \cup B) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B)$$

d'après la définition de $d(A, B)$.

Il en résulte que si A est borné, pour tout $x_0 \in E$, A est contenu dans la boule fermée de centre x_0 et de rayon $d(x_0, A) + \delta(A)$.

5. Ensembles ouverts

Dans un espace métrique E , muni de la distance d , un *ensemble ouvert* est un sous-ensemble A de E ayant la propriété suivante : pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x; r) \subset A$. L'ensemble vide est ouvert l'espace E tout entier est ouvert.

(3.5.1) *Toute boule ouverte est un ensemble ouvert.*

En effet, si $x \in B(a; r)$, alors $d(a, x) < r$ par définition; par suite la relation $d(x, y) < r - d(a, x)$ implique $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < r$, ce qui démontre l'inclusion $B(x; r - d(a, x)) \subset B(a; r)$.

(3.5.2) *La réunion d'une famille quelconque $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

En effet, si $x \in A_\mu$ pour un $\mu \in L$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x; r) \subset A_\mu \subset A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Par exemple, sur la droite réelle \mathbf{R} , tout intervalle $]a, +\infty[$ est ouvert, comme réunion des ensembles ouverts $]a, x[$ pour tout $x > a$. De la même manière, $] -\infty, a[$ est ouvert.

(3.5.3) *L'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

Il suffit de montrer que l'intersection de deux ensembles ouverts A_1 et A_2 est un ensemble ouvert, et de raisonner ensuite par récurrence. Si $x \in A_1 \cap A_2$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(x; r_1) \subset A_1$, $B(x; r_2) \subset A_2$; il est clair que si $r = \text{Min}(r_1, r_2)$, $B(x; r) \subset A_1 \cap A_2$.

En général, une intersection infinie d'ensembles ouverts n'est pas ouverte; par exemple l'intersection des intervalles $] -1/n, 1/n[$ sur \mathbf{R} est l'ensemble formé d'un seul point $\{0\}$ qui n'est pas ouvert, Cependant :

(3.5.4) *Dans un espace discret, tout ensemble est ouvert.*

En vertu de (3.5.2), il suffit de montrer que l'ensemble formé d'un seul point $\{a\}$ est ouvert. Mais, par définition $\{a\} = B(a; 1/2)$, d'où le résultat, d'après (3.5.1).

6. Voisinages

Si A est un sous-ensemble non vide de E , un *voisinage ouvert* de A est un ensemble ouvert contenant A ; un *voisinage* de A est un ensemble quelconque contenant un voisinage ouvert de A . Lorsque $A = \{x\}$, on parle de voisinages du point x (au lieu de voisinages de l'ensemble $\{x\}$).

(3.6.1) *Pour tout sous-ensemble non vide $A \subset E$, et tout $r > 0$, l'ensemble $V_r(A) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$ est un voisinage ouvert de A .*

En effet, si $d(x, A) < r$ et $d(x, y) < r - d(x, A)$, il résulte de (3.4.2) que $d(y, A) < d(x, A) + r - d(x, A) = r$, donc $V_r(A)$ est ouvert et il est évident qu'il contient A .

Lorsque $A = \{a\}$, $V_r(A)$ est la boule ouverte $B(a; r)$.

Un système fondamental de voisinages de A est une famille (U_λ) de voisinages de A telle que tout voisinage de A contienne un U_λ . Pour des ensembles A arbitraires, les $V_r(A)$ ($r > 0$) ne forment pas en général un système fondamental de voisinages de A . Il résulte des définitions que :

(3.6.2) Les boules $B(a; 1/n)$ (n entier > 0) forment un système fondamental de voisinages de a .

(3.6.3) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de A est un voisinage de A .

Ceci résulte de (3.5.3).

(3.6.4) Pour qu'un ensemble A soit un voisinage de chacun de ses points il faut et il suffit que A soit ouvert.

La condition est évidemment suffisante; réciproquement, si A est un voisinage de tout $x \in A$, il existe pour chaque $x \in A$ un ensemble ouvert $U_x \subset A$ qui contient x . Des relations $x \in U_x \subset A$ on déduit $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$, donc $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ est un ensemble ouvert, d'après (3.5.2).

PROBLÈME

Sur la droite réelle, montrer que le sous-ensemble N de tous les entiers ≥ 0 ne possède pas de système fondamental dénombrable de voisinages (raisonner par l'absurde et appliquer la remarque suivante : si (a_{mn}) est une suite double de nombres > 0 , la suite (b_n) où $b_n = a_{nn}/2$ est telle que pour aucun entier m l'inégalité $b_n \geq a_{mn}$ ne peut avoir lieu pour tous les entiers n).

7. Intérieur d'un ensemble

Un point x est dit *intérieur* à un ensemble A , si A est un voisinage de x . L'ensemble de tous les points intérieurs à A s'appelle l'*intérieur* de A et s'écrit $\overset{\circ}{A}$. Par exemple, sur la droite réelle \mathbf{R} , l'intérieur de tout intervalle d'origine a et d'extrémité b ($a < b$) est l'intervalle ouvert $]a, b[$; car ni a ni b ne peut être un point intérieur des intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, puisque aucun intervalle de centre a ou b n'est contenu dans ces trois intervalles.

(3.7.1) Pour tout ensemble A , $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ensemble ouvert contenu dans A .

En effet, si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe un ensemble ouvert $U_x \subset A$, contenant x ; pour tout $y \in U_x$, A est par définition un voisinage de y , donc $y \in \overset{\circ}{A}$, et par suite $U_x \subset \overset{\circ}{A}$, ce qui prouve que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, d'après (3.6.4). Réciproquement, si $B \subset A$ est ouvert, il est clair par définition que $B \subset \overset{\circ}{A}$. Il en résulte que les ensembles ouverts sont caractérisés par la relation $A = \overset{\circ}{A}$.

(3.7.2) Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Ceci résulte immédiatement de (3.7.1).

(3.7.3) Pour tout couple d'ensembles A, B , $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

L'inclusion $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ résulte de (3.7.2). D'autre part, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est ouvert d'après (3.5.3) et (3.7.1), et contenu dans $A \cap B$, donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$ d'après (3.7.1).

L'intérieur d'un ensemble non vide peut être vide; c'est le cas, par exemple, des ensembles formés d'un seul point dans \mathbb{R} .

Un point intérieur à $E - A$ est dit *extérieur* à A et l'intérieur de $E - A$ est appelé l'*extérieur* de A .

(3.7.4) Pour qu'un point $x \in E$ soit extérieur à A , il faut et il suffit que $d(x, A) > 0$.

En effet cette condition implique que $B(x; d(x, A)) \subset E - A$, donc x est intérieur à $E - A$; réciproquement, si x est extérieur à A , il existe une boule $B(x; r)$ avec $r > 0$, contenue dans $E - A$; pour chaque $y \in A$, nous avons alors $d(x, y) > r$, donc $d(x, A) \geq r$.

8. Ensembles fermés, points adhérents, adhérence d'un ensemble

Dans un espace métrique E , un *ensemble fermé* est par définition le complémentaire d'un ensemble ouvert. L'ensemble vide est fermé et il en est de même de l'espace E tout entier. Sur la droite réelle \mathbb{R} , les intervalles $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont des ensembles fermés; il en est de même de l'ensemble \mathbb{Z} des entiers; les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ ne sont ni ouverts ni fermés.

(3.8.1) Une boule fermée est un ensemble fermé; une sphère est un ensemble fermé.

En effet, si $x \notin B'(a; r)$, alors $d(x, B'(a; r)) \geq d(a, x) - r > 0$ d'après (3.4.1), donc la boule ouverte de centre x et de rayon $d(a, x) - r$ est dans

le complémentaire de $B'(a; r)$, ce qui prouve que ce complémentaire est ouvert. Le complémentaire de la sphère $S(a; r)$ est la réunion de la boule $B(a; r)$ et du complémentaire de la boule $B'(a; r)$, donc est ouvert d'après (3.5.2).

(3.8.2) *L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles fermés est fermée.*

(3.8.3) *La réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est fermée.*

Ceci résulte immédiatement de (3.5.2) et (3.5.3) respectivement, par passage aux complémentaires

En particulier l'ensemble réduit à un point $\{x\}$ est fermé, étant l'intersection des boules $B'(x; r)$.

(3.8.4) *Dans un espace discret, tout ensemble est fermé.*

Ceci résulte immédiatement de (3.5.4).

Un point adhérent à un sous-ensemble A de E est un point x tel que tout voisinage de x rencontre A . L'ensemble de tous les points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et s'écrit \bar{A} . Dire que x n'est pas un point adhérent à A signifie qu'il est intérieur à $E - A$, en d'autres termes :

(3.8.5) *L'adhérence d'un ensemble A est le complémentaire de l'extérieur de A .*

L'adhérence de la boule ouverte $B(a; r)$ est contenue dans la boule fermée $B'(a; r)$ mais peut en être distincte. Si un sous-ensemble A de la droite réelle est majoré (resp. minoré), $\sup A$ (resp. $\inf A$) est un point adhérent à A ,

En vertu de (3.8.5), les quatre propriétés suivantes des points adhérents et de l'adhérence résultent de celles démontrées dans 3.7 pour les points intérieurs et l'intérieur,

(3.8.6) *Pour tout ensemble A , \bar{A} est le plus petit ensemble fermé contenant A .*

En particulier, les ensembles fermés sont caractérisés par la relation $A = \bar{A}$.

(3.8.7) *Si $A \subset B$, on a $\bar{A} \subset \bar{B}$.*

(3.8.8) *Pour tout couple d'ensembles A, B on a $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.*

(3.8.9) *Pour qu'un point x soit point adhérent à A , il faut et il suffit que $d(x, A) = 0$.*

(3.8.10) L'adhérence d'un ensemble A est l'intersection des voisinages $V_r(A)$ de A .

C'est équivalent à (3.8.9).

(3.8.11) Dans un espace métrique E , tout ensemble fermé est l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles ouverts; tout ensemble ouvert est la réunion d'une suite croissante d'ensembles fermés.

On démontre le premier résultat en considérant les ensembles ouverts $V_{1/n}(A)$, et le second par passage aux complémentaires.

(3.8.12) Si un point x , adhérent à A , n'appartient pas à A , tout voisinage V de x est tel que $V \cap A$ soit infini.

Supposons le contraire et soit $V \cap A = \{y_1, \dots, y_n\}$; par hypothèse $r_k = d(x, y_k) > 0$. Soit $r > 0$ tel que $B(x; r) \subset V$ et $r < \text{Min}(r_1, \dots, r_n)$; alors l'intersection de A et $B(x; r)$ serait vide, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Un point $x \in E$ est dit *point frontière* d'un ensemble A , s'il est adhérent à la fois à A et à $\complement A$; l'ensemble $\text{Fr}(A)$ de tous les points frontières de A est appelé *frontière* de A . Il est clair que $\text{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A} = \text{Fr}(\complement A)$; d'après (3.8.7), $\text{Fr}(A)$ est un ensemble fermé, qui peut être vide (voir (3.19.9)). Un point frontière x de A est caractérisé par la propriété que dans tout voisinage de x il existe au moins un point de A et un point de $\complement A$. L'espace entier E est la réunion de l'intérieur de A , de l'extérieur de A et de la frontière de A , car, si un voisinage de x n'est contenu ni dans A , ni dans $\complement A$, il doit contenir des points des deux; deux quelconques de ces trois ensembles sont sans points communs.

La frontière d'un intervalle quelconque d'origine a et d'extrémité b , dans \mathbb{R} , est l'ensemble $\{a, b\}$; la frontière de l'ensemble \mathbb{Q} , dans \mathbb{R} , est \mathbb{R} lui-même.

PROBLÈMES

1) a) Soit A un ensemble ouvert dans un espace métrique E ; montrer que pour tout sous-ensemble B de E , $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Donner, sur la droite réelle, des exemples d'ensembles ouverts A, B tels que les quatre ensembles $A \cap \bar{B}$, $B \cap \bar{A}$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \bar{B}$ soient tous différents.

c) Donner sur la droite réelle des exemples d'intervalles A, B tels que $A \cap \bar{B}$ ne soit pas contenu dans $\overline{A \cap B}$.

2) Pour tout sous-ensemble A d'un espace métrique E , on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{A}$ et $\beta(A) = \bar{A}$.

a) Montrer que si A est ouvert, $A \subset \alpha(A)$ et si A est fermé, $A \supset \beta(A)$.

b) Montrer que, pour tout sous-ensemble A de E , $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ (utiliser a)).

c) Donner un exemple, sur la droite réelle, d'un ensemble A tel que les sept ensembles $A, \bar{A}, \alpha(A), \beta(A), \alpha(\bar{A}), \beta(\bar{A})$, soient tous distincts et n'aient pas d'autres relations d'inclusion que les suivantes :

$$\bar{A} \subset A \subset \alpha(\bar{A}), \alpha(\bar{A}) \subset \alpha(A), \beta(A) \subset \beta(\bar{A}), \bar{A} \subset \alpha(\bar{A}) \subset \beta(A) \subset \bar{A}, \bar{A} \subset \alpha(A) \subset \beta(\bar{A}) \subset \bar{A}.$$

3) Soit E un espace métrique.

a) Montrer que, pour tout sous-ensemble A de E , $\text{Fr}(\bar{A}) \subset \text{Fr}(A)$, $\text{Fr}(\bar{A}) \subset \text{Fr}(A)$ et donner des exemples (sur la droite réelle) dans lesquels ces trois ensembles sont distincts.

b) Soient A, B deux sous-ensembles de E . Montrer que $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$ et donner un exemple (sur la droite réelle) dans lequel ces ensembles sont distincts. Si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, montrer que $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.

c) Si A et B sont ouverts, montrer que

$$(A \cap \text{Fr}(B)) \cup (B \cap \text{Fr}(A)) \subset \text{Fr}(A \cap B) \subset (A \cap \text{Fr}(B)) \cup (B \cap \text{Fr}(A)) \cup (\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B))$$

et donner un exemple (sur la droite réelle) dans lequel ces trois ensembles sont distincts.

4) Soit d une distance sur un ensemble E , satisfaisant à l'inégalité ultramétrique :

$$d(x, z) \leq \text{Max}(d(x, y), d(y, z))$$

pour x, y, z dans E (voir exemple (3.2.6)) :

a) Montrer que si $d(x, y) \neq d(y, z)$, alors $d(x, z) = \text{Max}(d(x, y), d(y, z))$.

b) Montrer que toute boule ouverte $B(x; r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé, et que, pour tout $y \in B(x; r)$, $B(y; r) = B(x; r)$.

c) Montrer que toute boule fermée $B'(x; r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé, et que, pour tout $y \in B'(x; r)$, $B'(x; r) = B'(y; r)$.

d) Si deux boules dans E ont un point commun, l'une d'elles est contenue dans l'autre.

e) La distance de deux boules ouvertes distinctes, de rayon r , contenues dans une boule fermée de rayon r , est égale à r .

9. Sous-ensembles denses; espaces séparables

Dans un espace métrique E , un ensemble A est dit *dense par rapport à un ensemble* B , si tout point de B est un point adhérent à A , en d'autres termes si $B \subset \bar{A}$ (ou, ce qui est équivalent, si, pour tout $x \in B$, tout voisinage de x contient des points de A).

(3.9.1) Si A est dense par rapport à B , et B dense par rapport à C , alors A est dense par rapport à C .

Car la relation $B \subset \bar{A}$ implique $\bar{B} \subset \bar{A}$ d'après (3.8.6), et comme, par hypothèse, $C \subset \bar{B}$, on a $C \subset \bar{A}$.

Un ensemble A dense par rapport à E est appelé *partout dense* (ou simplement *dense*) dans E ; de tels ensembles sont caractérisés par le fait que $\bar{A} = E$, ou, ce qui est équivalent, que tout ensemble ouvert non vide contient au moins un point de A .