

Sujet 0

Il est un exemple de sujet pouvant être proposé lors de l'épreuve d'ADS. Il se trouve que le sujet traite d'arithmétique. Il n'y a rien à en déduire, cela aurait aussi bien pu être de l'algèbre, de l'analyse, des probabilités, de la combinatoire, des mathématiques appliquées, etc.

Le dossier se présente sous une forme classique. Une page de garde donnant quelques instructions générales assorties de quelques remarques particulières à bien lire et mémoriser pour ne pas se retrouver perdu durant l'épreuve. Le texte possède 16 pages, visiblement extraites d'un livre dont on a retiré des passages. On note l'absence de quelques chapitres, 1.1 par exemple; et des rajouts manuels : le candidat a été prévenu, cela ne devrait ni être déroutant ni gêner la lecture. Seize pages, cela peut paraître long mais celles-ci ne sont pas trop densément remplies. Le candidat se rappelle qu'il peut n'étudier qu'une partie du sujet. Une première lecture rapide de l'intégralité du texte s'impose (prévoir une trentaine de minutes) pour voir le niveau général du texte et ce qu'il est possible de faire en 2 heures.

Cette première lecture nous apprend que le texte porte sur les nombres premiers, notion connue depuis le collège mais pas forcément beaucoup rencontrée depuis. Par ailleurs, le texte commence en redonnant la définition, les prérequis semblent donc limités. Il y a quelques passages plus techniques et plus durs, sans preuve. Ces éléments nous rappellent qu'on est bien en épreuve d'ADS !

Lors de cette première lecture, relever un plan du texte pour s'y retrouver plus tard peut ne pas être du temps perdu. Le chapitre 1.2 contient un théorème connu avec une démonstration (facile). Le chapitre 1.3 contient deux théorèmes dont l'un est la conséquence de l'autre. Il faudra aller jusqu'à 2.10 pour connaître le fin mot de l'histoire (tout à la fin de notre texte). Etc. . .

Le texte contient à la fois des notions connues et peu mystérieuses, sur lesquelles il ne sera pas nécessaire d'insister et des passages citant des résultats visiblement plus difficiles, qu'on ne pourra, au mieux, que citer pour illustration. Il y a aussi un chapitre entier de notation (chapitre 1.6) qui est hors sujet pour nous, mais qu'il faut assimiler pour suivre la suite du texte.

Voici une proposition de plan :

1. Introduction : définition d'un nombre premier, exemples, crible d'Eratosthène, tables de nombres premiers jusqu'à 100. Théorème de décomposition des entiers en produits de nombres premiers. (Partie basée sur 1.2 et 1.4)

2. Théorème fondamental de l'arithmétique : a) Un lemme très important : premier théorème d'Euclide ; énoncé et démonstration utilisant les modules. Seconde démonstration; b) Preuve du théorème lui-même. (Partie basée sur 1.3, 2.9 et 2.10, 2.11)

3. Second théorème d'Euclide, et ses plusieurs preuves. (Partie basée sur 1.4, 2.1, 2.4)

4. Étude du nombre de nombres premiers. Énoncé du théorème des nombres premiers. Démonstration de bornes inférieures. Réflexions sur une borne supérieure. (Partie basée sur 1.8, 2.2, 2.6)

5. Conclusion : les nombres premiers ne sont pas si bien connus et gardent leurs mystères. Choix de quelques “curiosités” du texte.

Pour éviter de perdre du temps et de s’emmêler dans les concepts nouveaux, un exposé sur feuilles rétroprojetées paraît le mieux indiqué.

Exemple de questions que pourrait poser l’examineur en fonction de ce que le candidat aura inclus dans son propre exposé :

i) Décomposer en facteurs premiers 66600000. (Une telle question est un échauffement, il faut évidemment aller très vite dans la réponse).

ii) Comment comprenez-vous la phrase au début du deuxième paragraphe du chapitre 1.4 : “Ces tables montrent que la suite des nombres premiers est infinie” ?

iii) Pourquoi le produit de deux entiers de la forme $4n + 1$ a-t-il encore cette forme ? Quelle est la forme du produit de deux entiers de la forme $4n + 3$?

iv) Expliquer la divergence de la série $\sum 1/p$.

v) Le pgcd défini dans 2.9 est-il le même que celui que vous connaissez ?