Correction de la feuille_Exo_7 : Variables aléatoires discrètes.

Ex 1 : *(Quand nous avons fait cet exercice nous ne connaissions pas encore la loi géométrique, je corrige après le cours sur cette loi mais c'est moins intéressant)*

1) *Une question difficile à barêmer.*
2) Il s'agit d'une succession indéfinie d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : "obtenir un garçon" de probabilité $\frac{1}{2}$)

   N est le nombre d'épreuves nécessaires pour observer un succès, donc

$$\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2}}$$

3) A la question précédente on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N = n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{la somme des } P(N = n) \text{ est bien égale à } 1}$$

4) N suit une loi usuelle $\boxed{E(N) = 2}$
5) $E(N) = 2$ et dans chaque famille il y a un garçon/

   donc $\boxed{\text{la proportion de filles et de garçons dans l'ensemble de la population est } \frac{1}{2}}$
6) Limites de ce modèle :
   - toutes les familles ont un enfant.
   - On ne tient pas compte des naissances gémellaires.
   - On considère que dans chaque famille, les naissances sont indépendantes
   - Dans la réalité il existe un majorant au nombre d'enfants dans une même famille.
   - ...

Ex 2 :

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
2) On note B_n : "Le $n$ième tirage a donné une boule blanche".

   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(X = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap \overline{B_k}$

   donc *(formule des probabilités composées)* on obtient :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} P_{B_1\cap\ldots\cap Bi-1}(B_i)\right) \times P_{B_1\cap\ldots\cap Bk-1}(\overline{B_k}) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1}\right) \times \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$$

3) Il suffit de montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

Passons par les sommes partielles

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!} && \textit{(Par téléscopage)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{il est quasi-impossible de ne jamais tirer de boule noire}}$$

4) X admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{k\geqslant 1} kP(X=k)$ est ACV ou encore $\sum_{k\geqslant 1} kP(X=k)$ est CV car $kP(X=k) \geqslant 0$

Passons par les sommes partielles

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-(k+1)+1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!}\right) && \textit{(Ré-indiçage dans la première somme)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - 1 && \textit{(Telescopage)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e-1 && \textit{Somme partielle de la série exponentielle.}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{X \text{ admet une espérance qui vaut } E(X) = e-1}$$

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : *(non corrigé)*