

Exercice 1 : Reproduction d'un papillon tropical

Dans une étude de terrain, un entomologiste observe l'espèce de papillon *Morpho cyaneus*. Chaque femelle pond un nombre d'œufs N suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque œuf éclot avec une probabilité p , indépendamment des autres.

On note X le nombre de chenilles survivantes.

- 1) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant ($N = n$).
- 2) En déduire la loi de X .
- 3) Calculer l'espérance et la variance de X .
- 4) Interpréter le résultat pour une espèce menacée lorsque p est faible.

Exercice 2 : Qualité d'un lot d'ampoules LED

Une entreprise produit des ampoules LED. Chaque jour, un inspecteur sélectionne au hasard n ampoules indépendantes. La durée de fonctionnement (en milliers d'heures) de chaque ampoule suit une loi géométrique de paramètre p (fin de vie au premier défaut rencontré).

On note :

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad m_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

- 1) Déterminer la loi de m_n .
- 2) Déterminer la loi de M_n .
- 3) Calculer $E(m_n)$.
- 4) Que signifie un M_n élevé pour le service qualité ? un m_n élevé pour le service qualité ?

Exercice 3 : Détection de pollution marine

Un drone océanographique détecte des microplastiques lorsqu'il traverse des zones contaminées. Chaque zone de 100 m est contaminée avec la probabilité r .

On envoie le drone à travers des zones successives indépendantes. On note Y le nombre de zones traversées jusqu'à la deuxième zone contaminée.

- 1) Déterminer la loi de Y .
- 2) Calculer $P(Y > k)$ en fonction de k .
- 3) Calculer $E(Y)$ et interpréter dans le cadre du suivi écologique.

Exercice 4 : Échantillonnage génétique chez une population de poissons

Une espèce de poisson possède 4 variants génétiques distincts notés A, B, C et D. On prélève des individus un par un, au hasard, avec remise.

On note X_k le rang du premier prélèvement où k variants distincts ont été observés.

- 1) Déterminer la loi de $X_2 - 1$.
- 2) Déterminer la loi de $X_3 - X_2$.
- 3) Donner une expression de $P(X_4 = n)$ par conditionnement.
- 4) En déduire une expression série pour $E(X_4)$.
- 5) Comment interpréter $E(X_4)$ dans une étude de diversité génétique ?

Exercice 5 : Rendement d'une ruche

Une ruche produit des alvéoles contenant du miel. Chaque jour, l'activité des abeilles remplit un nombre Z d'alvéoles, uniforme sur $\{1, \dots, m\}$. Chaque alvéole remplie a ensuite une probabilité s d'être récupérable (pas contaminée par un parasite).

On note R le nombre d'alvéoles récupérables dans une journée.

- 1) Déterminer la loi de R .
- 2) Calculer $E(R)$ et $\text{Var}(R)$.
- 3) Comment ces résultats peuvent-ils aider à optimiser la production ?