

Feuille Exo_8 : Variables aléatoires discrètes.

Ex 1 : Une tortue pond N œufs. On suppose que N est une variable de Poisson de paramètre λ .

Chaque œuf pondu a la probabilité $p \in]0, 1[$ de survivre et ceci indépendamment des autres œufs. On note X le nombre de survivants.

- 1) Pour $i \in \mathbb{N}$, donner la loi conditionnelle de X sachant $(N = i)$.
- 2) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(X = k)$.
- 3) Quelle est l'espérance et la variance de X ?

Ex 2 : On note N un entier naturel non nul.

1) *Questions préliminaires.*

a. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \{1, \dots, N\}$, montrer que : $E(X) = \sum_{k=1}^N P(X \geq k)$

b. Montrer que : $\forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket, \sum_{k=1}^N \binom{k-1}{n} = \binom{N}{n+1}$. (On pourra raisonner par récurrence sur N).

2) On dispose d'une banque de fragments d'ADN numérotés de 1 à N , où le numéro correspond à un certain « niveau de complexité » (plus le numéro est grand, plus le fragment est long).

Un biologiste prélève simultanément n fragments au hasard, sans remise, dans cette banque.

On note X le plus grand numéro parmi les n fragments sélectionnés

(c'est-à-dire le fragment le plus complexe observé dans l'échantillon).

- a. Déterminer un univers Ω muni d'équiprobabilité pour modéliser cette expérience de prélèvement.
 - b. À l'aide de ce modèle probabiliste, déterminer la probabilité $P(X \leq k-1)$ pour $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$.
 - c. En déduire l'espérance de X .
- 3) Une urne contient des jetons numérotés de 1 à $N \geq n$,
On en prélève simultanément n jetons et on note X le maximum des n jetons.
- a. Déterminer un univers Ω muni d'équiprobabilité pour modéliser l'expérience.
 - b. Déterminer la probabilité de $P(X \leq k-1)$ à l'aide de ce modèle probabiliste.
 - c. En déduire l'espérance de X .

Ex 3 : La marque de chocolat "Poulain" édite une collection de 3 figurines représentant trois héros du roman : "Le Seigneur des anneaux". Julie est une fan du livre et achète des plaques de chocolat pour avoir la collection complète. On suppose que chaque paquet contient l'une quelconque des trois figurines avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.

On note X_2 le nombre de paquets que Julie doit acheter pour avoir deux figurines différentes et X_3 le nombre de paquets pour avoir la collection complète.

(On admettra ici que X_2 et X_3 sont deux variables aléatoires bien définies)

- 1) a. Montrer que $X_2 - 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.
- b. En déduire l'espérance de X_2 .
- 2) a. Donner l'ensemble $X_3(\Omega)$ des valeurs prises par X_3 .
- b. Montrer que pour tout $n \in X_3(\Omega)$,
$$P(X_3 = n) = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2} P(X_3 = n | X_2 = i)$$
- c. Soit i un entier supérieur ou égal à 2,
Justifier que la loi conditionnelle de $X_3 - i$ sachant $(X_2 = i)$ est une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
- d. Vérifier que : $\forall n \geq 3, P(X_3 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3^{n-1}}$
- e. Calculer l'espérance de X_3 .

Ex 4 : Une urne contient des jetons numérotés de 1 à $n \geq 3$.

On en prélève trois simultanément et on note X_1, X_2, X_3 les numéros sortis, classés dans l'ordre : $X_1 < X_2 < X_3$.

Le but de cet exercice est de déterminer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

- 1) Déterminer un univers Ω muni d'équiprobabilité pour modéliser l'expérience.
- 2) Déterminer la loi de X_2 à l'aide de ce modèle probabiliste.
- 3) Vérifier que $Y = n + 1 - X_2$ suit la même loi que X_2 et en déduire l'espérance de X_2 .
- 4) Déterminer les lois de X_1 et X_3 à l'aide du modèle probabiliste donné à la question 1).
- 5) Conclure en trouvant l'espérance de ces trois variables.

Ex 5 : Une grenouille monte les $2n$ marches d'un escalier en sautant :

- ou bien une seule marche, avec la probabilité p .
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts et Y_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une seule marche au cours des n premiers sauts.

- 1) a. Déterminer la loi de Y_n .
b. Exprimer X_n en fonction de Y_n .
c. En déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.
- 2) On note Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ième}}$ marche.
Exprimer, pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$, la probabilité $P(Z_n = k)$ en fonction des probabilités des événements $(Z_{n-1} = k - 1)$ et $(Z_{n-2} = k - 1)$, en déduire que :

$$E(Z_n) = pE(Z_{n-1}) + (1 - p)E(Z_{n-2}) + 1$$

- 3) Déterminer un réel a pour que la suite (u_n) définie par $u_n = E(Z_n) - na$ soit récurrente linéaire d'ordre 2?
- 4) Calculer alors l'espérance de Z_n . Donner un équivalent de $E(Z_n)$ quand n tend vers l'infini et interpréter le résultat.

Ex 6 : Un sac contient des jetons numérotés :

3 jetons portent le numéro ①, 3 jetons portent le numéro ② et 3 jetons portent le numéro ③.

On tire successivement et au hasard un jeton dans le sac.

On note X le numéro du tirage où on a vu les trois numéros pour la première fois.

Autrement dit : X est le temps d'attente pour avoir la collection des trois numéros.

1) Questions préliminaires

Avant de commencer les calculs :

- a. D'après votre intuition, le temps d'attente moyen pour obtenir les trois numéros sera-t-il plus grand avec remise ou sans remise? Justifiez brièvement.
- b. Proposez une estimation numérique grossière de chacune des deux espérances.

2) Les tirages se font sans remise.

- a. Ecrire un programme Python permettant de simuler la réalisation de X .
- b. Déterminer la loi de X .
- c. Calculer l'espérance de X .
- d. Vérifier la cohérence des résultats de b) et c) avec N simulation de la fonction de a)

3) Les tirages se font avec remise.

- a. Ecrire un programme Python permettant de simuler la réalisation de X .
- b. Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X .
- c. Montrer que : $\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}$ et en déduire que la variable aléatoire X est bien définie.
- d. Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$.
- e. Vérifier la cohérence des résultats de c) et d) avec N simulations de la fonction de a)

*Pour les simulations on utilisera le module **random** avec l'alias **rd** et on fera $N = 10000$ simulations.*