Correction feuille Exo_8 : Variables aléatoires discrètes.

Ex 1 : 1) Sachant $(N=i)$, l'expérience est constituée de i épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succès étant : "l'oeuf survit" a pour probabilité p.
X est le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètre (i,p).

$$\boxed{\text{Sachant } (N=i), \quad X \hookrightarrow \mathscr{B}(i,p)}$$

2) Les valeurs prises par X sont les entiers naturels,
pour chaque $k\in\mathbb{N}$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet $(N=i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(N=i)P_{N=i}(X=k)\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\times\binom{i}{k}p^kq^{i-k}\times \mathbb{1}_{k\leqslant i} && \text{Sachant } (N=i),\quad X\hookrightarrow\mathscr{B}(i,p) \quad \textit{d'après 1)}\\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\times\binom{i}{k}p^kq^{i-k} && \textit{(on supprime des termes nuls)}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^kp^k\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^{i-k}}{(i-k)!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^kp^k\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^{i}}{(i)!} && \textit{(Changement d'indice)}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^kp^k\,e^{\lambda q} && \textit{(série exponentielle)}\\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)}$$

3) Connaissant l'espérance et la variance des lois de Poisson on peut affirmer que :

$$\boxed{E(X)=\lambda p \quad \text{et} \quad V(X)=\lambda p}$$

Ex 2 : 1) a.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}P(X\geqslant k) &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=k}^{N}P(X=j) && \text{car } X(\Omega)\subset [\![1,n]\!]\\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}P(X=j) && \text{inversion d'une somme triangulaire}\\
&= \sum_{j=1}^{N} jP(X=j)\\
&= E(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{N}P(X\geqslant k)}$$

b.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\binom{k-1}{n} &= \sum_{k=1}^{N}\left(\binom{k}{n+1}-\binom{k-1}{n+1}\right)\\
&= \binom{N}{n+1}-\binom{0}{n+1} && \textit{(Télescopage)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\binom{k-1}{n}=\binom{N}{n+1}}$$

2) *(non corrigé)*

3) a. Le modèle classique est Ω : ensemble des combinaisons de n éléments de $[\![1;N]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

b. $(X \leqslant k-1)$ est l'ensemble des combinaisons de n éléments de $[\![1;k-1]\!]$ donc $\text{card}(X \leqslant k-1) = \binom{k-1}{n}$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![1,N]\!], \quad P(X \leqslant k-1) = \frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}}$$

c. En appliquant les trois questions précédentes :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{N} P(X \geqslant k) \qquad \textit{(d'après la question 1))} \\
&= \sum_{k=1}^{N} (1 - P(X \leqslant k)) \qquad \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières))} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}} \right) \qquad \textit{(d'après la question 3)b)} \\
&= N - \frac{\binom{N}{n+1}}{\binom{N}{n}} \qquad \textit{(d'après la question 1)b)} \\
&= N - \frac{N!}{(n+1)!(N-n-1)!} . \frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= N - \frac{N-n}{n+1} \\
&= \frac{Nn + N - N + n}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{n(N+1)}{n+1}}$$

Ex 3 : 1) a. On note pour $k \in \mathbb{N}^*$, C_k l'événement : "On obtient une nouvelle figure au $k$ème paquet".

$$X_2(\Omega) = [\![2;+\infty[\![\quad \text{et pour } k \in [\![2;+\infty[\![, \quad [X_2 = k] = \bigcap_{i=2}^{k-1} \overline{C_i} \cap C_k$$

En utilisant la formule des probabilités composées on obtient : $P([X_2 = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \frac{2}{3}$

En notant $X = X_2 - 1$, on a $X(\Omega) = [\![1;+\infty[\![$ et

$P([X = k]) = P([X_2 = k+1])$ d'où $P([X = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}$

$$\boxed{X_2 - 1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{2}{3}}$$

b. Connaissant l'espérance des lois géométriques on a : $E(X_2 - 1) = \frac{3}{2}$

or $E(X_2 - 1) = E(X_2) - 1$ donc $\boxed{E(X_2) = \frac{5}{2}}$

2) a. $\boxed{X_3(\Omega) = [\![3;+\infty[\![}$

b. On applique, pour $n \geqslant 3$, la formule des probabilité totales avec le système complet : $([X_2 = i])_{i \geqslant 2}$:

$$P([X_3 = n]) = \sum_{i=2}^{+\infty} P([X_2 = i]) P\big([X_3 = n] | [X_2 = i]\big)$$

donc

$$P([X_3=n])=\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-2}P\big([X_3=n]|[X_2=i]\big)$$

de plus, si $i\geqslant n$ alors $P\big([X_3=n]|[X_2=i]\big)=0$. donc

$$\boxed{\text{pour tout } n\in[\![3;+\infty[\![,\quad P(X_3=n)=\sum_{i=2}^{n-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-2}P\big(X_3=n|X_2=i\big)}$$

c. Sachant $[X_2=i]$, (*On raisonne avec la probabilité conditionnelle* $P_{[X_2=i]}$)

$(X_3-i)(\Omega)\in\mathbb{N}^*$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, $[X_3-i=k]=\bigcap_{j=i+1}^{i+k-1}\overline{C_j}\cap C_{i+k}$

donc avec la formule des probabilités composées $P([X_3-i=k]|[X_2=i])=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \text{ un entier supérieur ou égal à 2, sachant } [X_2=i] \text{ alors } (X_3-i)\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

d. Soit $n\geqslant 3$,

$$\begin{aligned}P(X_3=n)&=\sum_{i=2}^{n-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-2}P\big(X_3=n|X_2=i\big)\\&=\sum_{i=2}^{n-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i-1}\frac{1}{3}\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{-i}\\&=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\\&=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 3,\quad P(X_3=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{2}{3^{n-1}}}$$

e. (*Calcul a faire*) $\boxed{E(X_3)=\frac{11}{2}}$

Ex 4 : (*non corrigé*)

Ex 5 : (*non corrigé*)

Ex 6 : 1) a. Le temps d'attente moyen doit être inférieur avec un tirage sans remise.
En effet : Au fur et à mesure des tirages sans remise il est de plus probable d'obtenir un nouveau numéro.

b. *Difficile de corriger cette question.*

2) **Les tirages se font sans remise.**

a.
```
def simul():
    urne = 3*[1] + 3*[2] + 3*[3]
    L = []
    while True:
        a = urne.pop(rd.randrange(len(urne)))
        L.append(a)
        if 1 in L and 2 in L and 3 in L:
            return len(L)
```

b. Modèle :

Ω : l'ensemble des anagrammes de AAABBBCCC muni de P uniforme, $\text{card}(\Omega)=\frac{9!}{3!3!3!}=1680$

Valeurs prises par X, $\quad X(\Omega) = [\![3;7]\!]$

$$\text{card}(X=3) = 3! \times \frac{6!}{2!2!2!} = 540$$
$$\text{card}(X=4) = 3 \times 2 \times 3 \times \frac{5!}{2!2!} = 540$$
$$\text{card}(X=5) = 3 \times \left(2 \times 4 \times \frac{4!}{2!2!} + 2 \times \binom{4}{2}\frac{4!}{2!}\right) = 360$$
$$\text{card}(X=6) = 3 \times 2 \times \binom{5}{2} \times 3 = 180$$
$$\text{card}(X=7) = 3 \times \binom{6}{3} = 60$$

donc

$k \in X(\Omega)$	3	4	5	6	7
$P(X=k)$	$\frac{9}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{28}$

c. $E(X) = \displaystyle\sum_{k=3}^{7} kP(X=k)$, $\quad \boxed{E(X) = \frac{59}{14}}$

d. Le programme suivant permet de vérifier la cohérence de ces deux résultats :

```
# Estimation de la loi
T = 8*[0]
N = 10000
for k in range(N):
    T[simul()] += 1
print("Estimation de la loi de X")
print([t/N for t in T[3:]])
print("Valeur théorique")
print([9/28,9/28,3/14,3/28,1/28])

# Estimation de l'espérance
s = 0
N = 10000
for k in range(N):
    s += simul()
print("Estimation de l'espérance de X")
print(s/N)
print("Valeur théorique")
print(59/14)
```

3) **Les tirages se font avec remise.**

a.
```
def simul():
    urne = 3*[1] + 3*[2] + 3*[3]
    L = []
    while True:
        a = rd.choice(urne)
        L.append(a)
        if 1 in L and 2 in L and 3 in L:
            return len(L)
```

b. $\boxed{X(\Omega) = [\![3, +\infty[\![}$

c. On fixe k $[\![3, +\infty[\![$ et on fait un tirage avec remise de k éléments dans $\{1, 2, 3\}$
C'est un modèle usuel avec $\Omega = \{1, 2, 3\}^k$,

$$\text{card}(\Omega) = 3^k \quad \text{et} \quad \text{card}(X=k) = \underbrace{\left(2^{k-1}-2\right)}_{\textit{finissant par } 1} + \underbrace{\left(2^{k-1}-2\right)}_{\textit{finissant par } 2} + \underbrace{\left(2^{k-1}-2\right)}_{\textit{finissant par } 3}$$

Ce qui donne bien le résultat.

$$\boxed{\forall k \in X(\Omega), \quad P(X=k) = \frac{2^{k-1}-2}{3^{k-1}}}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=3}^{n} \frac{2^{k-1}-2}{3^{k-1}} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{4}{9}\sum_{k=3}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} - 2\times\frac{1}{9}\sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-3} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{9}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 2\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X \text{ est bien définie}}$$

d. X admet une espérance si, et seulement si, $\sum kP(X=k)$ est absolument convergente,

ce qui équivaut ici à $\sum kP(X=k)$ est convergente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=3}^{n} k\frac{2^{k-1}-2}{3^{k-1}} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\frac{2^{k-1}-2}{3^{k-1}} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\times\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{X \text{ admet une espérance} \quad \text{et} \quad E(X)=\frac{11}{2}}$$

e. Le programme suivant permet de vérifier la cohérence de ces résultats.

```
# Estimation de la loi

T = 30*[0]
N = 10000
for k in range(N):
    T[simul()] += 1
print("Estimation de la loi de X")
print([t/N for t in T[3:]])
print("Valeur théorique")
print([round((2**(k-1)-2)/3**(k-1),4) for k in range(3,28)])


print(' ')

# Estimation de l'espérance

s = 0
N = 10000
for k in range(N):
    s += simul()
print("Estimation de l'espérance de X")
print(s/N)
print("Valeur théorique")
print(11/2)
```