

Ex 1 : 1) On note $Z = X + Y$.

on sait que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$

en appliquant la formule des proba. totales avec le système complet : $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 P([X + Y = n]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k] \cap [X + Y = n]) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = n - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n P([X = k] \cap [Y = n - k]) \quad \text{car pour } k > n \quad [Y = n - k] = \emptyset \\
 &= \sum_{k=0}^n P([X = k]) \times P([Y = n - k]) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \times \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\
 &= \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n \quad \text{Formule du binôme.}
 \end{aligned}$$

Remarque : Après ce calcul on peut affirmer que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Ce résultat est au programme on peut l'utiliser sans démonstration.

- 2) Soit (X_n) une suite de variable aléatoire suivant tous une loi de Poisson, on note pour chaque n , λ_n le paramètre de la loi de X_n .

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \underbrace{\sum_{k=1}^n X_k}_{\mathcal{P}(n)}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n \lambda_k$

- Pour $n = 1$,

X_1 suit la loi de Poisson de paramètre λ_1 et $\sum_{k=1}^1 \lambda_k = \lambda_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} X_k = \sum_{k=1}^n X_k + X_{n+1}$$

or (lemme de coalition) les X_n sont mutuellement indépendantes donc $\sum_{k=1}^n X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes

et hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$ et on a : $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_{n+1})$

on peut en déduire avec le résultat de la question 1) que : $\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} X_k}_{\mathcal{P}(n+1)} \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k + \lambda_{n+1}\right)$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n X_k \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \sum_{k=1}^n \lambda_k}$$

Ce résultat est aussi au programme au programme de BCPST on peut l'utiliser sans démonstration.

Des résultats préliminaires.

- Pour tout $(a, x, y) \in \mathbb{R}^3$,

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ y \leq a \end{cases} \iff \max(x, y) \leq a$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} a < x \\ \text{et} \\ a < y \end{cases} \iff a < \min(x, y)$$

- Pour tout $(a, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\textcircled{3} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i \leq a \iff \max_{1 \leq i \leq n} (x_i) \leq a$$

$$\textcircled{4} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a < x_i \iff a < \min_{1 \leq i \leq n} (x_i)$$

- X est une variable aléatoire réelle à valeurs entières et k est un entier.

$$\boxed{P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)}$$

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1)$$

$$P(X = k) = P(X < k + 1) - P(X < k)$$

$$\boxed{P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)}$$

Remarque du correcteur : j'ai encadré les deux formules les plus couramment utilisées.

Ex 2 : 1) on sait que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et X, Y indépendantes donc $Z_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Z_1 \leq k) &= P(\max(X, Y) \leq k) \\ &= P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) \\ &= P((X \leq k))P((Y \leq k)) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \quad \text{car on connaît bien son cours sur la loi } \mathcal{G}(p). \end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_1 \leq k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^2$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_1 = k) = P(Z_1 \leq k) - P(Z_1 \leq k - 1)$

En effet : $(Z_1 \leq k) = (Z_1 \leq k - 1) \cup (Z_1 = k)$ (réunions disjointes)

En conclusion :

$$\boxed{Z_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Z_1 = k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^2}$$

Remarque : On est tenté de vouloir simplifier cette expression, mais ici je ne vois pas de réels simplifications.

2) Cet exercice est le premier de la feuille Act_11.

Ex 3 : 1) On sait que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Z_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Z_1 > k) &= P(\min(X, Y) > k) \\ &= P((X > k) \cap (Y > k)) \\ &= P((X > k))P((Y > k)) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.} \\ &= q^k \times q^k \end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_1 > k) = q^{2k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Z_1 = k) &= P(Z_1 > k-1) - P(Z_1 > k) \\ &= (q^2)^{k-1} - (q^2)^k \\ &= (q^2)^{k-1}(1 - q^2) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$Z_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2)$$

Remarque : Le minimum de deux géométries indépendantes est une géométrie (on peut l'interpréter avec la situation type).

2) (Fait au tableau dans le groupe G2)

z_i	1	2	3	4	5	6
$P(Z = z_i)$	$\frac{15}{60}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{5}{60}$

Ex 4 : 1) on a fait en classe n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, et pas $\mathcal{G}(1/3)$

On note $q = 1 - p$.

On sait que : pour tout i , $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Y_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq k) &= P\left(\max_{1 \leq i \leq n} (X_i) \leq k\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq k) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes.} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - q^k) \\ &= (1 - q^k)^n \end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_1 \leq k) = (1 - q^k)^n$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_1 = k) = P(Y_1 \leq k) - P(Y_1 \leq k-1)$

En conclusion :

$$Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y_1 = k) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n$$

2) • $Y_2(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(Y_2 \leq k) &= P\left(\max_{1 \leq i \leq 5} (X_i) \leq k\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^5 (X_i \leq k)\right) \\ &= \prod_{i=1}^5 P(X_i \leq k) \quad \text{car } X_1, \dots, X_5 \text{ indépendantes.} \\ &= \prod_{i=1}^5 \left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^5 \end{aligned}$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_2 = k) = P(Y_2 \leq k) - P(Y_2 \leq k-1)$

En conclusion :

$$Y_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y_2 = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^5 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^5$$

Ex 5 : 1) on sait que : pour tout i , $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Y_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 P(Y_1 > k) &= P\left(\min_{1 \leq i \leq n} (X_i) > k\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > k)\right) \\
 &= \prod_{i=1}^n P(X_i > k) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes.} \\
 &= \prod_{i=1}^n q^k \\
 &= (q^k)^n
 \end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_1 > k) = q^{nk}$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 P(Y_1 = k) &= P(Y_1 > k-1) - P(Y_1 > k) \\
 &= (q^n)^{k-1} - (q^n)^k \\
 &= (q^n)^{k-1}(1 - q^n)
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^n)}$$

Remarque : Le minimum de n géométries indépendantes est une géométrie (on peut l'interpréter avec la situation type).

2) (non corrigé)