

Ex 1 : 1) Soient n, n' deux entiers naturels non nuls, p un réel de l'ouvert $]0, 1[$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n', p)$

a. Démontrer ou admettre que pour tout $k \in \llbracket 0, n + n' \rrbracket$,

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n'}{k-i} = \binom{n+n'}{k}$$

b. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

- 2) Généraliser le résultat de **1)** à n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi binomiale de même paramètre p .
- 3) Quel résultat (*du cours*) retrouve t-on sur la somme de variables de Bernoulli ?

Ex 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 3 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})$

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 4 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 5 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 6 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes telles que pour tout $X_k \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})$

- 1) Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.
- 3) Calculer l'espérance de ces deux variables aléatoires.

Ex 7 : Soient $p \in]0, 1[$, $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$,

On note $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$

Déterminer la loi de Y et celle de Z .

Ex 8 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$.

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 9 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$.

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 10 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 10])$.

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 11 : Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n'])$.

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 12 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 10])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.

Ex 13 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.

Ex 14 : Une entreprise produit des ampoules LED. Chaque jour, un inspecteur sélectionne au hasard n ampoules indépendantes. La durée de fonctionnement (en milliers d'heures) de chaque ampoule suit une loi géométrique de paramètre p (fin de vie au premier défaut rencontré).

On note :

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad m_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

- 1) Déterminer la loi de m_n .
- 2) Déterminer la loi de M_n .
- 3) Calculer $E(m_n)$.
- 4) Que signifie un M_n élevé pour le service qualité ? un m_n élevé pour le service qualité ?