

La colle commencera par deux questions de cours :

une sur les équations différentielles et une sur les VAR discrètes.

• **Révisions : Equations différentielles linéaires.**

Solution de $y' + a(t)y = 0$. (Un espace vectoriel de dimension 1. Conséquence : si $f \neq 0$ et $f \in S_0$ alors $S_0 = \text{Vect}(f)$)

Remarque : La fonction nulle est la seule solution de $y' + a(t)y = 0$ qui s'annule sur I .

Résolution de $y' + a(t)y = f(t)$.

Principe de superposition. Méthode de variations de la constante.

Solution de $ay'' + by' + cy = 0$. (Un espace vectoriel de dimension 2)

Résolution de $ay'' + by' + cy = f(t)$ avec $a \neq 0$.

Principe de superposition. Conditions initiales.

La forme d'une solution particulière est donnée lorsque f n'est pas une fonction constante.

• **Variables aléatoires réelles discrètes.**

Condition d'existence et définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.

Linéarité. Croissance.

Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète.

Condition d'existence et définition de la variance d'une variable aléatoire discrète, de l'écart-type.

Proposition : $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Formule de Koenig-Huygens. (Attention aux conditions d'utilisation)

Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.

Généralisation n VAR discrètes indépendantes ou à une suite de VAR discrète.

Lois usuelles avec $X(\Omega)$ fini : Variable certaine, loi de Bernoulli, uniforme, binomiale. (Pas hypergéométrique)

Lois usuelles avec $X(\Omega)$ dénombrable : Loi géométrique, loi de Poisson.

Situations types (pour la binomiale et la géométrique). (bien distinguer la définition et les situations types !!)

Connaître l'espérance et la variance de ces lois. (sauf la variance de l'uniforme)

Invariance temporelle des lois géométriques. (démonstration à connaître)

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. ($n \geq 30$ et $p \leq 0,1$)

Nous n'avons pas encore vu les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

• **Maximum, minimum et somme de variables aléatoires discrètes.**

Loi du maximum ou du minimum de deux variables aléatoires indépendantes.

Loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes (VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Loi de la somme de deux VAR discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson.

(Stabilité des lois de Poisson).

Généralisation au cas de n variables aléatoires suivant une loi de Poisson.

Lois de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

Nous n'avons pas encore vu le cours sur les couples de variables aléatoires.

• **Python.**

Simulation des tirages successifs dans des urnes.

Simulation d'une loi discrète fini quelconque.

Récupération du nombre d'occurrences des valeurs prises par une VAR discrètes au cours de simulations.

Estimation de l'espérance et de la loi d'une VAR discrète par des séries de simulations.

Exercices :

- Reconnaissances des lois usuelles. Y compris des lois conditionnelles.

- Exercices de probabilité sur un univers quelconque avec utilisation des théorèmes

(totales ou composées, utilisation d'un SCE).

- Exercices sur les VAR discrètes sur un univers quelconque.

(Pouvant utiliser les capacités du cours sur les séries)

- Programme Python permettant d'estimer la loi ou l'espérance d'une VAR définie par une expérience.

- Une application du cours sur les équations différentielles.