Correction de la feuille_Exo_9 : Variables aléatoires discrètes. Min. Max. Somme

Ex 1 : 1) a. Une urne contient n boules rouges et n' boules vertes.
On dénombre l'ensemble Ω de toutes les n-combinaisons de cette urne.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, A_k : l'ensemble des n-combinaisons avec exactement k boules rouges.

on a : $\text{card}(A_k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{choix des } k \text{ rouges}} \times \underbrace{\binom{n'}{n-k}}_{\text{choix des } n-k \text{ vertes}}$ et $\text{card}(\Omega) = \binom{n+n'}{n}$

et $A_0, A_1, ..., A_n$ forment une partition de Ω donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n'}{n-k} = \binom{n+n'}{n}}$$

(Formule de Vandermonde)

Il existe d'autres démonstrations de cette relation :

- En identifiant les coefficients des deux polynômes : $(1+X)^n(1+X)^{n'}$ et $(1+X)^{n+n'}$

- Par récurrence sur n.

b. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $Y(\Omega) = [\![0, n']\!]$ et X, Y sont indépendantes donc
l'ensemble des valeurs de $X + Y$ est : $(X + Y)(\Omega) = [\![0, n + n']\!]$, et
pour $k \in [\![0, n + n']\!]$:

$$\begin{aligned}
P([X+Y=k]) &= \sum_{i=0}^{n} P([X=i] \cap [X+Y=k]) \qquad \text{(Proba. totales avec le système } ([X=i])_{0\leqslant i\leqslant n})\\
&= \sum_{i=0}^{n} P([X=i] \cap [Y=k-i])\\
&= \sum_{i=0}^{n} P([X=i]) \times P([Y=k-i]) \qquad \text{(Indépendance de } X \text{ et } Y)\\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}\binom{n'}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n'-k+i}\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n'}{k-i}\right) p^k(1-p)^{n+n'-k}\\
&= \binom{n+n'}{k} p^k(1-p)^{n+n'-k} \qquad \text{(Formule de Vandermonde démontrée en 1)a.)}
\end{aligned}$$

En conclusion on a bien

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+n', p)}$$

2) *On pourrait démontrer par récurrence que :*
Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n_k, p_k\big)$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, p\big) \quad \text{avec} \quad n = \sum_{k=1}^{n} n_k \quad \text{et} \quad p = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

3) $\boxed{\text{La somme de } n \text{ variables de Bernoulli mutuellement indépendantes et de paramètre } p \text{ suit la loi } \mathscr{B}(n,p)}$

Ex 2 :

Ex 3 :

Ex 4 : On note $q = 1 - p$.

1) on sait que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Z_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned}\text{pour } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z_1 \leqslant k) &= P(\max(X,Y) \leqslant k)\\ &= P\Big((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)\Big)\\ &= P\Big((X \leqslant k)\Big)P\Big((Y \leqslant k)\Big) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.}\\ &= \left(1-q^k\right)\left(1-q^k\right)\end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_1 \leqslant k) = \left(1-q^k\right)^2$

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_1 = k) = P(Z_1 \leqslant k) - P(Z_1 \leqslant k-1)$ donc

$$\boxed{Z_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Z_1 = k) = \left(1-q^k\right)^2 - \left(1-q^{k-1}\right)^2}$$

2) on sait que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Z_2(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\text{Pour } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z_2 > k) &= P(\min(X,Y) > k)\\ &= P\Big((X > k) \cap (Y > k)\Big)\\ &= P\Big((X > k)\Big)P\Big((Y > k)\Big) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.}\\ &= q^k \times q^k\end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_2 > k) = q^{2k}$

$$\begin{aligned}\text{Et alors pour } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z_2 = k) &= P(Z_2 > k-1) - P(Z_2 > k)\\ &= (q^2)^{k-1} - (q^2)^k\\ &= (q^2)^{k-1}(1-q^2)\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{Z_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1-q^2\right)}$$

3) On sait que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Z_3(\Omega) \subset [\![2; +\infty[\![$,

et en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet : $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}P([Z_3 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [X + Y = n])\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = n-k])\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = n-k]) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \times q^{n-k-1}p \times \mathbb{1}_{n-k \geqslant 1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2\, q^{n-2}\\ &= (n-1)p^2\, q^{n-2}\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_3(\Omega) = [\![2; +\infty[\![\text{ et pour tout } n \in [\![2; +\infty[\![, \quad P([Z_3 = n]) = (n-1)p^2\, q^{n-2}}$$

4) On remarque que $Z_1 + Z_2 = X + Y = Z_3$.

- La linéarité de $E(.)$ donne $E(Z_3) = E(X) + E(Y)$ et comme ce sont deux géométriques donc $\boxed{E(Z_3) = \dfrac{2}{p}}$.

- On a vu que $Z_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1-q^2\right)$ donc $\boxed{E(Z_2) = \dfrac{1}{1-q^2}}$.
- Et enfin $Z_1 = Z_3 - Z_2$ donne

$$\begin{array}{rcl} E(Z_1) & = & E(Z_3) - E(Z_2) \\ & = & \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-q^2} \\ & = & \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{2p-p^2} \end{array}$$

$$\boxed{E(Z_1) = \frac{3-2p}{p(2-p)}}$$

Ex 5 : *(non corrigé)*

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : *(non corrigé)*

Ex 8 : *(Uniquement les résultats)*

1)

z	1	2	3	4	5	6
$P(Z_1 = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

2)

z	1	2	3	4	5	6
$P(Z_2 = z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

3)

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z_3 = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

4) *(non corrigé)*

Ex 9 : 1) on sait que : $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$ donc $Z_1(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$ et pour $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\begin{aligned} P(Z_1 \leqslant k) &= P(\max(X,Y) \leqslant k) \\ &= P\Big((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)\Big) \\ &= P\Big((X \leqslant k)\Big) P\Big((Y \leqslant k)\Big) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.} \\ &= \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} \end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc $\forall k \in [\![0;n]\!], \quad P(Z_1 \leqslant k) = \dfrac{k^2}{n^2}$

De plus pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $(Z_1 \leqslant k) = (Z_1 \leqslant k-1) \cup (Z_1 = k)$ *(réunions disjointes)* donc

$$P(Z_1 = k) = P(Z_1 \leqslant k) - P(Z_1 \leqslant k-1)$$

or $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ donc

$$\boxed{Z_1(\Omega) = [\![1,n]\!] \text{ et pour tout } k \in [\![1,n]\!], \quad P(Z_1 = k) = \frac{2k-1}{n^2}}$$

2) on sait que : $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$ donc $Z_2(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$

Pour $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\begin{aligned} P(Z_2 > k) &= P(\min(X,Y) > k) \\ &= P\Big((X > k) \cap (Y > k)\Big) \\ &= P\Big((X > k)\Big) P\Big((Y > k)\Big) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.} \\ &= \frac{n-k}{n} \times \frac{n-k}{n} \end{aligned}$$

On remarque que ce résultat est encore vrai pour $k = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(Z_2 > k) = \frac{(n-k)^2}{n^2}$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(Z_2 > k-1) = (Z_2 > k) \cup (Z_2 = k)$ *(réunions disjointes)* donc

$$\begin{aligned} P(Z_2 = k) &= \frac{(n-k+1)^2}{n^2} - \frac{(n-k)^2}{n^2} \\ &= \frac{(n-k)^2 + 2(n-k) + 1 - (n-k)^2}{n^2} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{Z_2(\Omega) = [\![1,n]\!] \text{ et pour tout } k \in [\![1,n]\!], \quad P(Z_2 = k) = \frac{2n-2k+1}{n^2}}$$

3) On sait que : $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$ donc $Z_3(\Omega) \subset [\![2;2n]\!]$,

et en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet : $([X=i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$,
on obtient pour $k \in [\![2;2n]\!]$

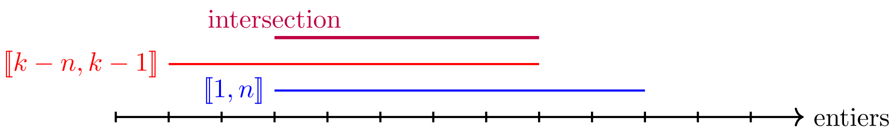
$$\begin{aligned}
P([Z_3 = k]) &= \sum_{i=1}^{n} P([X=i] \cap [X+Y=k]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P([X=i] \cap [Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P([X=i]) \times P([Y=k-i]) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \mathbb{1}_{1 \leqslant k-i \leqslant n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{k-n \leqslant i \leqslant k-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_3(\Omega) = [\![2,2n]\!] \text{ et } \begin{array}{ll} \text{pour tout } k \in [\![\,2\,,\, n+1]\!], & P(Z_3 = k) = \dfrac{k-1}{n^2} \\ \text{pour tout } k \in [\![n+2, 2n]\!], & P(Z_3 = k) = \dfrac{2n+1-k}{n^2} \end{array}}$$

Une deuxième présentation de ce calcul.
L'ensemble des valeurs prises par $X+Y$ est : $(X+Y)(\Omega) = [\![2,2n]\!]$.
Soit $k \in [\![2,2n]\!]$,

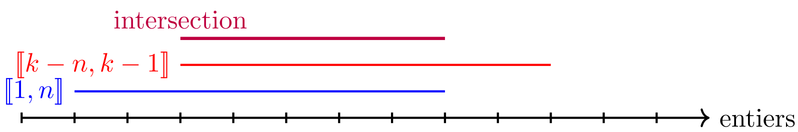
$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i) \times P(Y=k-i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{1 \leqslant i \leqslant n} \times \frac{1}{n} \mathbb{1}_{1 \leqslant k-i \leqslant n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{1 \leqslant i \leqslant n} \times \mathbb{1}_{k-n \leqslant i \leqslant k-1} \\
&= \frac{1}{n^2} \operatorname{card}([\![1,n]\!] \cap [\![k-n, k-1]\!])
\end{aligned}$$

Avec des petits dessins :
- pour k entre 2 et n



$$\operatorname{card}([\![1,n]\!] \cap [\![k-n, k-1]\!]) = \operatorname{card}([\![1, k-1]\!]) = k-1$$

- pour k entre $n+1$ et $2n$.



$$\operatorname{card}([\![1,n]\!] \cap [\![k-n, k-1]\!]) = \operatorname{card}([\![k-n, n]\!]) = 2n-k+1$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![2,n]\!], \quad P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \quad P(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}}$$

Une troisième présentation de ce calcul.

Plus pratique, mais correcte si bien présentée

On donne les valeurs prises par $X+Y$ pour chaque résultat de $[\![1,n]\!]^2$:

$X\backslash Y$	1	2	3	$\cdots$	$n{-}1$	n
1	2	3	4	$\cdots$	n	$n{+}1$
2	3	4	5	$\cdots$	$n{+}1$	$n{+}2$
3	4	5	6	$\cdots$	$n{+}2$	$n{+}3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n{-}1$	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$\cdots$	$2n{-}2$	$2n{-}1$
n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$\cdots$	$2n{-}1$	$2n$

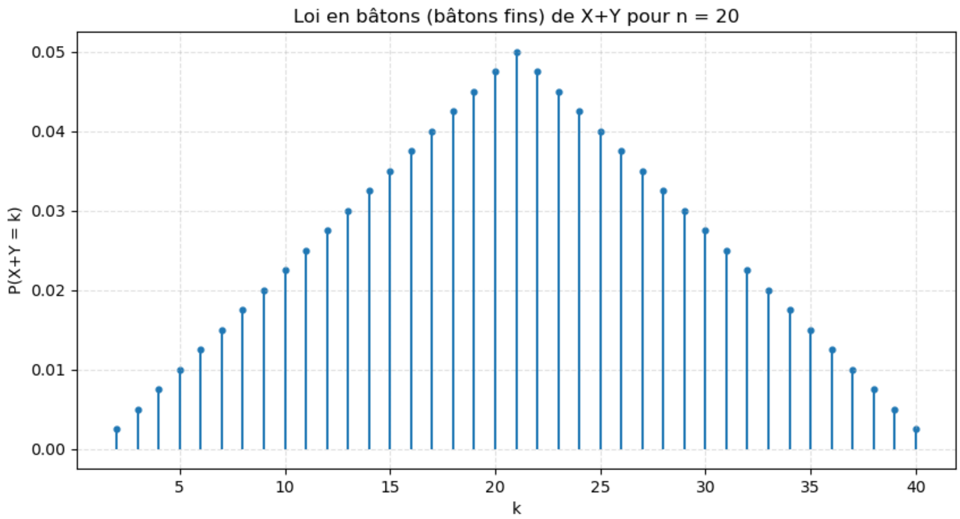
$$P(X+Y=k)=\frac{\text{nombre de cases avec } k}{n^2}$$

On compte les cases en diagonale.
Donc $P(X+Y=2)=\dfrac{1}{n^2}$, $P(X+Y=3)=\dfrac{2}{n^2}$, $\ldots$, $P(X+Y=n+1)=\dfrac{n}{n^2}$
et $P(X+Y=n+1)=\dfrac{n}{n^2}$, $P(X+Y=n+2)=\dfrac{n-1}{n^2}$, $\ldots$, $P(X+Y=2n)=\dfrac{1}{n^2}$

Ce qu'on peut résumer en :

$$\boxed{\forall k\in[\![2,n]\!],\qquad P(X+Y=k)=\frac{k-1}{n^2}\qquad \text{et}\qquad \forall k\in[\![n+1,2n]\!],\qquad P(X+Y=k)=\frac{2n-k+1}{n^2}}$$

La représentation de cette loi vous aidera peut être à la retenir :



4) $Z_3=X+Y$ admet une espérance et $E(Z_3)=E(X)+E(Y)$
On connait l'espérance d'une loi uniforme donc

$$\boxed{E(Z_3)=n+1}$$

On a montré à la question 1) que $Z_1(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $P(Z_1=k)=\dfrac{2k-1}{n^2}$ donc

$$
\begin{aligned}
E(Z_1) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{2k-1}{n^2}\\
&= \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n+1}{n}\left(\frac{4n+2-3}{6}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(Z_1)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$$

On remarque $Z_3 = Z_1 + Z_2$ ce qui entraîne *(linéarité)* que $E(Z_2) = E(Z_3) - E(Z_1)$
or $n+1-\dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$$\boxed{E(Z_2)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}$$

Ex 10 : *(non corrigé)*

Ex 11 : *(Uniquement les résultats pour 1) et 2)* On suppose $n \leqslant n'$.

1)

$$\boxed{Z_1(\Omega)=[\![1,n+n']\!] \ \text{ et } \ \begin{array}{l} \text{pour tout } k\in[\![\,1\,,\,n]\!],\quad P(Z_1=k)=\dfrac{2k-1}{n.n'}\\ \text{pour tout } k\in[\![n+1,n']\!],\quad P(Z_1=k)=\dfrac{n}{n.n'}\end{array}}$$

2)

$$\boxed{Z_2(\Omega)=[\![1,n]\!] \ \text{ et } \ \text{pour tout } k\in[\![\,1\,,\,n]\!],\quad P(Z_2=k)=\frac{n+n'-2k+1}{n.n'}}$$

3) *Fait en classe*
On donne les valeurs prises par $X+Y$ pour chaque résultat de $[\![1,n]\!]\times[\![1,n']\!]$:

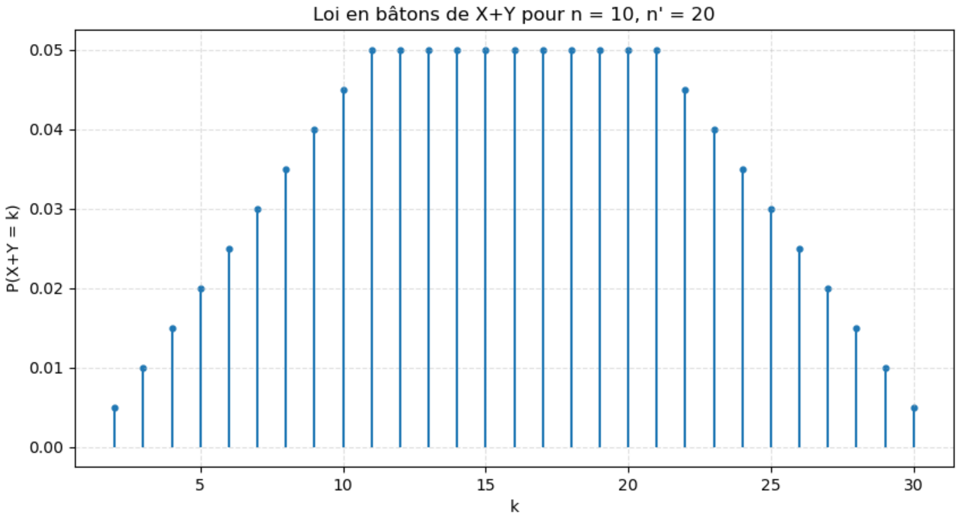
$X\backslash Y$	1	2	3	$\cdots$	$n{-}1$	n	$\cdots$	$\cdots$	n'
1	2	3	4	$\cdots$	n	$n{+}1$	$n{+}2$		$n'{+}1$
2	3	4	5	$\cdots$	$n{+}1$	$n{+}2$			
3	4	5	6	$\cdots$	$n{+}2$	$n{+}3$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$			
$n{-}1$	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$\cdots$	$2n{-}2$	$2n{-}1$			$n{+}n'{-}1$
n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$\cdots$	$2n{-}1$	$2n$			$n{+}n'$

$$P(X+Y=k)=\frac{\text{nombre de cases avec } k}{n.n'}$$ *On compte les cases en diagonale.*

Ce qu'on peut résumer en :

$$Z_3(\Omega) = [\![2, n+n']\!] \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{pour tout } k \in [\![\,2\,,\,n+1]\!], & P(Z_3 = k) = \dfrac{k-1}{n.n'} \\ \text{pour tout } k \in [\![\,n+2\,,\,n'+1]\!], & P(Z_3 = k) = \dfrac{n}{n.n'} \\ \text{pour tout } k \in [\![n'+2, n+n']\!], & P(Z_3 = k) = \dfrac{n+n'+1-k}{n.n'} \end{cases}$$

La représentation de cette loi vous aidera j'espère à la retenir :



4) *(non corrigé)*

Ex 12 : *(non corrigé)*

Ex 13 : *(non corrigé)*

Ex 14 : *(non corrigé)*

Ex 15 : *(non corrigé)*