Fonctions indicatrices.

Définition :

Soient E un ensemble et A une partie de E,
On appelle **fonction indicatrice** de A, *(notée : $\mathbb{1}_A$)* l'application de : $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}$

Remarque : $\mathbb{1}_A$ peut prendre juste deux valeurs 0 et 1 donc $\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A$.

Une autre notation.

Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'un élément x de E.
en notant $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ pour tout x de E, on note : $\mathbb{1}_{P(x)} = \mathbb{1}_A(x)$

Remarque : Si $P(x)$ vraie alors $\mathbb{1}_{P(x)} = 1$ sinon $\mathbb{1}_{P(x)} = 0$.

Cours sur les ensembles finis :

Soit E un ensemble fini,

❶ Soit A une partie de E, $\text{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$

❷ Soient A et B deux parties de E, $\text{card}(A \cap B) = \sum_{x \in A} \mathbb{1}_B(x)$

❸ Soient $P(x)$ une propriété dépendant d'un élément x de E, $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_{P(x)} = \text{card}(\{x \in E \mid P(x)\})$

Cours sur l'indépendance des événements et des VAR :

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un système probabilisé.

❶ Si A est un événement alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$

❷ (Complément) Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille d'événements,
Les événements A_k sont mutuellement indépendants
si, et seulement si, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_k}$ sont indépendantes.

Autres relations, autres remarques :

- Produit de convolution discret.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{1 \leqslant k-i \leqslant n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{i+j=k} = \text{card}\left(\left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i+j=k\right\}\right)$$

Détail du raisonnement (Pour Sonia) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{i+j=k} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{j=k-i} \\ &= \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k-i \in [\![1;n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \\ &= \mathbb{1}_{1 \leqslant k-i \leqslant n} \end{aligned}$$

- Inversion d'une somme double triangulaire

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathbb{1}_{j \leqslant i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \mathbb{1}_{j \leqslant i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$