

Exercices autour du calcul du cardinal de :

$$\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n' \rrbracket \mid n + n' = k \}$$

Exercice 1 - Génétique : répartition des crossing-over

Lors d'une méiose, deux paires de chromosomes homologues peuvent subir des crossing-over (CO).
On modélise leur nombre respectif par

$$1 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq 6.$$

On observe sur un gamète un total de $k = 7$ CO.

- 1) Déterminer le nombre de couples (i, j) tels que $i + j = 7$.
- 2) Lister explicitement ces couples.
- 3) Expliquer biologiquement pourquoi plusieurs couples (i, j) peuvent conduire au même total.
- 4) En supposant les couples équiprobables, calculer

$$\mathbb{P}(i = 3 \mid i + j = 7).$$

Exercice 2 - Biologie des populations : structure d'âge

On modélise une population divisée en deux classes d'âge :

$$1 \leq i \leq 30 \quad (\text{jeunes}), \quad 1 \leq j \leq 50 \quad (\text{adultes}).$$

On observe un effectif total de $k = 60$ individus.

- 1) Déterminer le nombre de couples (i, j) vérifiant $i + j = 60$.
- 2) Expliquer pourquoi un tel dénombrement intervient dans la modélisation démographique.
- 3) En supposant toutes les répartitions équiprobables, calculer la probabilité que $j \geq 20$.

Exercice 3 - Écologie : répartition de biomasse

Un micro-écosystème contient une biomasse totale de $k = 100$ kg. On modélise :

$$20 \leq i \leq 60 \quad (\text{producteurs}), \quad 10 \leq j \leq 50 \quad (\text{consommateurs}).$$

- 1) Déterminer le nombre de couples (i, j) tels que $i + j = 100$.
- 2) En supposant une probabilité uniforme sur tous les couples admissibles, calculer l'espérance de i .
- 3) Donner un exemple d'interprétation écologique réelle d'un tel modèle discret.

Exercice 4 - Géologie : modèle de mélange magmatique

On étudie un magma résultant du mélange de deux sources A et B . On modélise :

$$1 \leq i \leq 40 \quad (\text{contribution de } A), \quad 1 \leq j \leq 60 \quad (\text{contribution de } B).$$

Une contrainte physico-chimique impose la relation $i + j = 50$.

- 1) Déterminer le nombre de couples (i, j) admissibles.
- 2) Discuter l'interprétation géologique de la multiplicité des couples possibles.
- 3) Si toutes les combinaisons sont équiprobables, calculer la probabilité que $i \geq 20$.
- 4) Expliquer comment l'analyse isotopique peut permettre d'éliminer certaines solutions.