Feuille_info_13 : Méthode d'Euler.

De nombreux phénomènes scientifiques sont décrits par un problème de Cauchy :

$$Y'(t) = F(Y(t), t) \quad \text{et} \quad Y(t_0) = Y_0$$

Par exemple :
- croissance d'une population,
- cinétique chimique,
- évolution d'un système physique
- économie.

Lorsque F est continue, une solution existe toujours. Lorsque F est de classe $\mathcal{C}^1$ la solution du problème de Cauchy est alors unique. Mais même lorsque existence et unicité sont garanties, la solution explicite est rarement accessible. On doit donc l'approcher numériquement.

La méthode d'Euler est la plus simple de ces approximations : elle consiste à faire évoluer une solution approchée pas à pas, en suivant la direction donnée par la dérivée.

Ce principe, avancer en utilisant une information locale, se retrouve dans de nombreux algorithmes modernes, notamment dans l'apprentissage des réseaux de neurones.

– –

Partie 1 : Les équations différentielles du premier ordre, fonction inconnue réelle.

(Inconnue $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

On cherche à tracer la courbe de l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = F(y(t), t) \qquad \text{et} \qquad y(t_0) = y_0$$

Pour cela on écrit l'approximation :

$$\frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} \approx F(y(t), t) \qquad \text{ou encore} \qquad y(t+dt) \approx y(t) + dt \times F(y(t), t)$$

La méthode pour obtenir une approximation de la courbe solution sur $[t_0, t_f]$ consiste à :

- subdiviser $[t_0, t_f]$ en n intervalles de même longueur $\boxed{dt = \dfrac{t_f - t_0}{n}}$,
- de déterminer une approximation y_k des images $y(t_k)$ avec la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + dt \cdot F(y_k, t_k)}$$

1) a) Rappeler la définition de la fonction exponentielle.

b) Appliquer la méthode d'Euler pour tracer la fonction exponentielle sur $[0, 2]$ à partir de sa définition.

2) Appliquer la méthode d'Euler sur $[e, 4]$ au problème suivant :

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}(t - y(t))y(t) \qquad \text{et} \qquad y(e) = 3$$

3) On note $f : x \longmapsto x \sin(x)$.

Utiliser la méthode d'Euler pour tracer la courbe de plusieurs primitives de f sur $[0, 7]$

4) Tester la fonction précédente avec le problème : sur $[0, 3]$, $\quad y'(t) = 2\sin(t)y(t) \quad$ et $\quad y(0) = 1$.

Et vérifier en traçant dans le même repère la solution : $y : t \longmapsto \exp(2 - 2\cos(t))$

5) Ecrire un programme Python traçant sur l'intervalle $[0, 6]$ la solution du problème différentiel suivant :

$$y'(t) + \sin\big(y(t)\big) = 2t \qquad \text{et} \qquad y(2) = 2$$

Partie 2 : Les équations différentielles du premier ordre, fonction inconnue vectorielle.

(Inconnue $Y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = F(Y(t), t) \qquad \text{et} \qquad Y(t_0) = Y_0$$

En prenant pour simplifier $n = 2$ et $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ on obtient le système différentiel suivant :

$$\forall t \in I, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x(t), y(t), t) \\ f_2(x(t), y(t), t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

On raisonne comme dans la partie 1. On obtient une approximation de (x_k, y_k) des images $(x(t_k), y(t_k))$ avec les relations de récurrence suivantes :

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + dt \cdot f_1(x_k, y_k, t_k) \quad \text{et} \quad y_{k+1} = y_k + dt \cdot f_2(x_k, y_k, t_k)}$$

6) Appliquer la méthode d'Euler au problème suivant pour t dans l'intervalle $[0, 30]$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x'(t) &= & y(t) \\ y'(t) &= & -x(t) \end{cases}$$

On tracera x en fonction de t, y en fonction de t et y en fonction de x.

7) *Lotka-Volterra.*

Appliquer la méthode d'Euler au problème suivant avec $a, b, c, d = 0.8,\ 0.4,\ 0.9,\ 0.1$ pour t dans l'intervalle $[0, 30]$

$$\begin{cases} x(0) = 5 \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) &= & x(t)\,(a - b\,y(t)) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) &= & -y(t)\,(c - d\,x(t)) \end{cases}$$

On tracera x en fonction de t, y en fonction de t et y en fonction de x.

Partie 3 : Les équations différentielles du second ordre, fonction inconnue réelle.

(Inconnue $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)

$$\forall t \in I, \quad y''(t) = f(y(t), y'(t), t) \qquad \text{et} \qquad y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_1$$

Ici on pose $z = y'$ pour se ramener au système différentielle $\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = f(y(t), z(t), t) \end{cases}$

On se retrouve dans la situation de la partie 2. On obtient une approximation (y_k, z_k) des images $(y(t_k), z(t_k))$ avec la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{y_{k+1} \;=\; y_k + dt \cdot z_k \qquad \text{et} \qquad z_{k+1} \;=\; z_k + dt \cdot F_2(y_k, z_k, t_k)}$$

8) Appliquer la méthode d'Euler sur l'exemple suivant :

$$y'' = 2y' + y + 1 \qquad \text{avec} \quad y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0$$

Ce qu'on traduit en : $\quad (y,\ y')' = (y',\ 2y' + y + 1)$.

Vous comparerez votre résultat à la solution : $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left((2 + \sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})x} + (2 - \sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})x}\right) - 1$

9) Résoudre avec la méthode d'Euler : $\quad y' = 2y + t \qquad$ avec $\quad y(0) = 1$

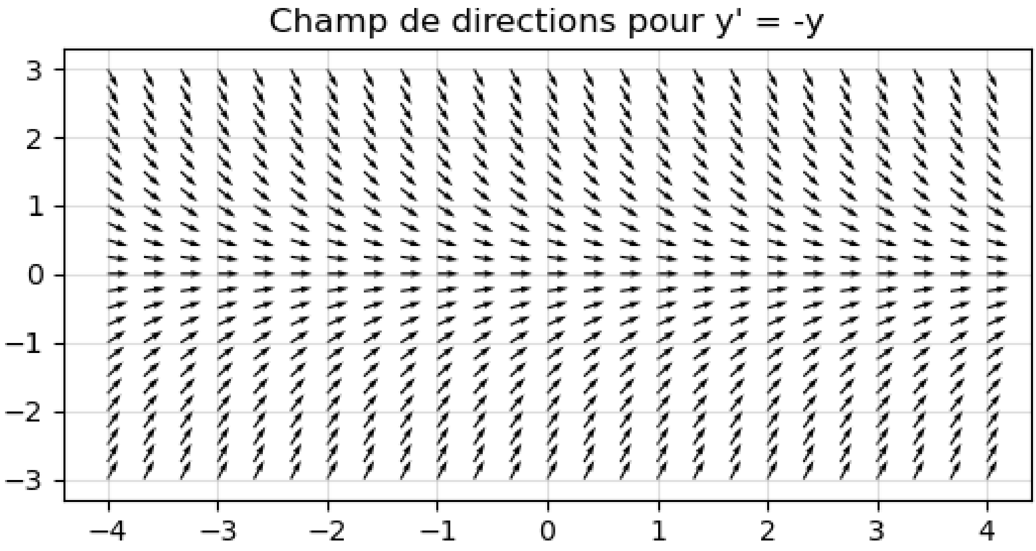
Vous comparerez votre résultat à la solution : $t \longmapsto \dfrac{5}{4}e^{2t} - \dfrac{2t + 1}{4}$

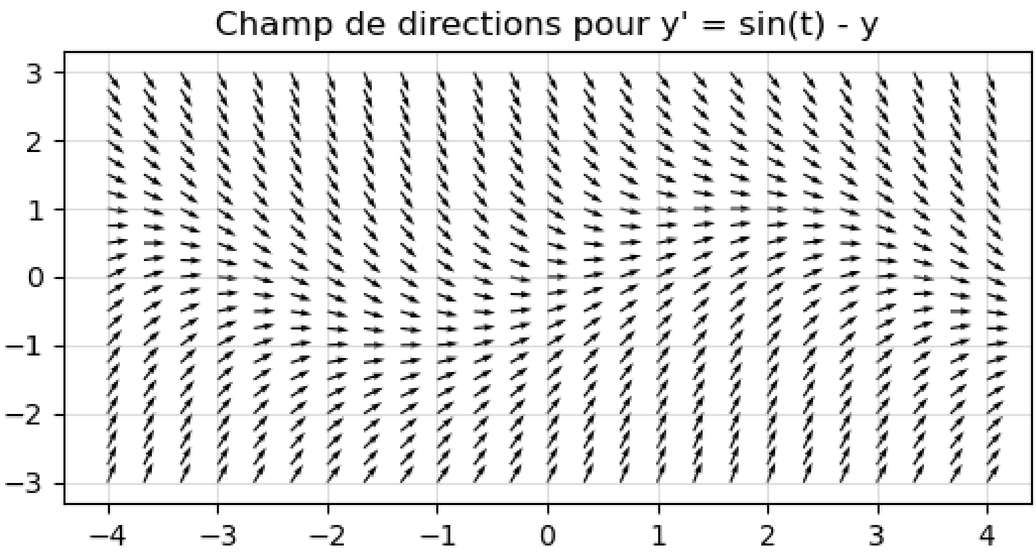
10) Résoudre avec la méthode d'Euler : $\quad y'' = 2y' + 3y + 1 \qquad$ avec $\quad y(0) = 1$ et $\quad y'(0) = 0$

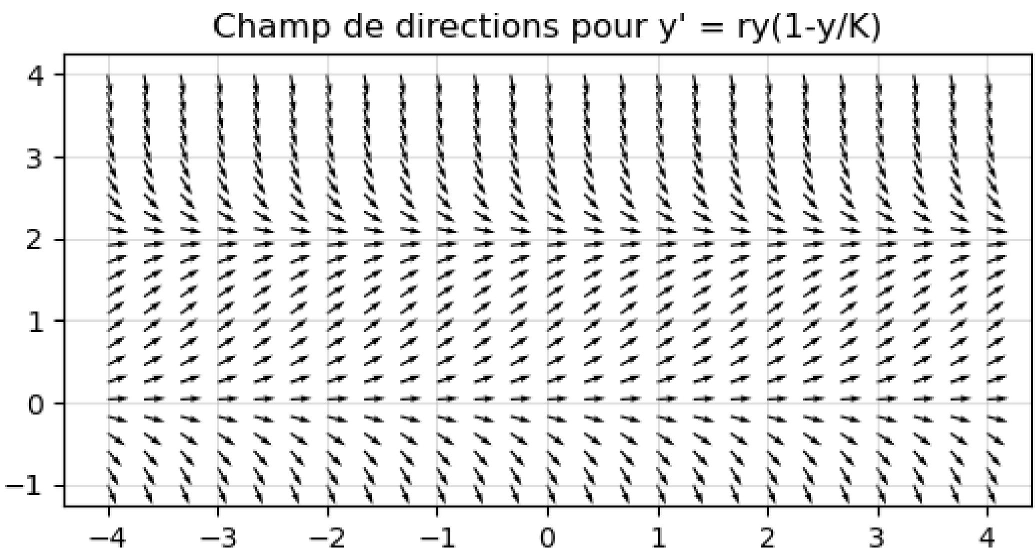
Ce qu'on traduit en : $\quad (y, y')' = (y', 2y' + 3y + 1)$

Vous comparerez votre résultat à la solution : $t \longmapsto -\dfrac{1}{3} + e^{-t} + \dfrac{e^{3t}}{3}$

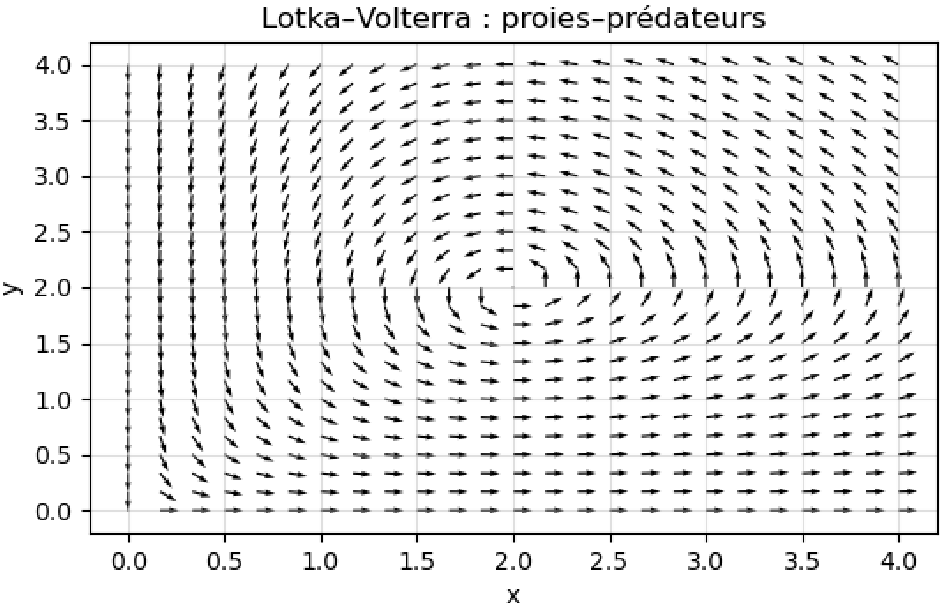
Annexe 1

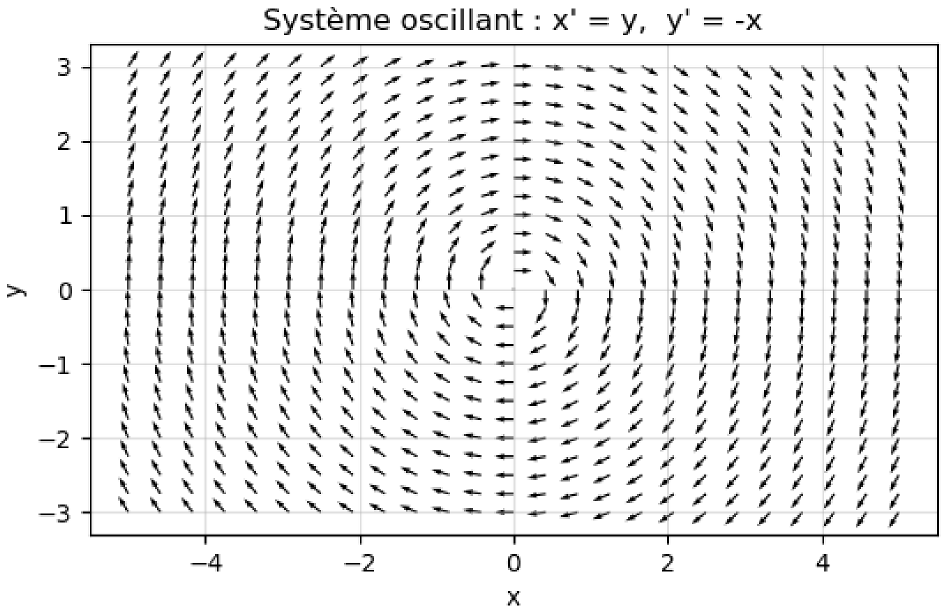

Champ de directions pour y' = -y

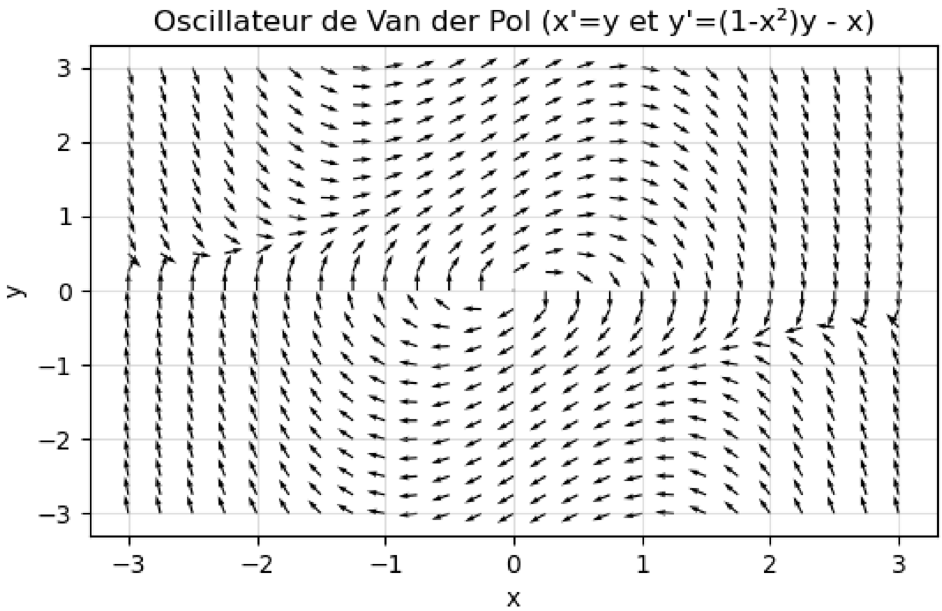

Champ de directions pour y' = sin(t) - y


Champ de directions pour y' = ry(1-y/K)

Annexe 2


Lotka–Volterra : proies–prédateurs
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
x


Système oscillant : x' = y, y' = -x
3
2
1
0
−1
−2
−3
y
−4
−2
0
2
4
x


Oscillateur de Van der Pol (x'=y et y'=(1-x²)y - x)
3
2
1
0
−1
−2
−3
y
−3
−2
−1
0
1
2
3
x