Fiche sur Min. Max. Somme

Vous devriez pouvoir redémontrer tous les résultats de cette fiche.

- Pour le max de deux VAR indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$P(\max(X,Y) \leqslant k) = P((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)) \qquad \text{et} \qquad P(Z=k) = P(Z \leqslant k) - P(Z \leqslant k-1)$$

- Pour le min de deux VAR indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$P(\min(X,Y) > k) = P((X > k) \cap (Y > k)) \qquad \text{et} \qquad P(Z=k) = P(Z > k-1) - P(Z > k)$$

- Pour la somme deux VAR indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) \times P(Y=k-i)$$

- Si X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ alors $P(X \leqslant k) = 1 - q^k$ et $P(X > k) = q^k$. (où $q = 1-p$)

- Le minimum de géométriques est une géométrique et cela peut se comprendre avec la situation type.

- Si X suit la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(X \leqslant k) = \dfrac{k}{n}$ et $P(X > k) = 1 - \dfrac{k}{n}$

- Pour l'espérance :

$$X + Y = \min(X,Y) + \max(X,Y)$$

Si X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$ *(sous réserve de l'existence de cette somme)*

Remarques :

- La relation $X + Y = \min(X,Y) + \max(X,Y)$ est utile pour le calcul des espérances car elle donne une relation entre les trois espérances : $E(X+Y) = E(\min(X,Y)) + E(\max(X,Y))$
- Les formules $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$ et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$ ne sont pas au programme de BCPST.
- Une <u>idée</u> de la démonstration de $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$: *(Il manque des théorèmes pour justifier ces calculs)*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i)\mathbb{1}_{i \geqslant k} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=i)\mathbb{1}_{i \geqslant k} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{i} P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} iP(X=i) \quad = E(X)
\end{aligned}$$

- On a aussi vu dans ces exercices les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{1 \leqslant k-i \leqslant n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{i+j=k} = \operatorname{card}\left(\left\{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i+j=k \right\}\right)$$