Feuille Cours_6 : applications linéaires.

Ex 1 : 1) Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x, 2y) \end{array} \qquad \Phi : \begin{array}{ccc} C^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array} \qquad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array}$$

2) Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+1, y-1) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, x+y) \end{array} \qquad \Phi : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{array}$$

Ex 2 : Déterminer une base du noyau des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, -x-y, 2x+2y) \end{array} \qquad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X) - \dfrac{1}{2}XP'(X) \end{array}$$

Ex 3 : Les applications linéaires suivantes sont-elles injectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, y, 2x+2y) \end{array} \qquad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP'(X) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP(X) \end{array} \qquad \Phi : \begin{array}{ccc} C^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Ex 4 : Déterminer une base de l'image des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, -x-y, 2x+2y) \end{array} \qquad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X) - \dfrac{1}{2}XP'(X) \end{array}$$

Ex 5 : Les applications linéaires suivantes sont-elles surjectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, y, 2x+2y) \end{array} \qquad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad \Phi : \begin{array}{ccc} C^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Ex 6 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1) $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

2) $\Phi : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_0^1 t^2 f(t)\,dt.$$

3) $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\psi(P) = X^2P'(X) - P''(X).$$

Ex 7 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que l'application

$$T : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad T(X) = AX + BX$$

est linéaire.

2) Soit $u : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application définie par

$$u(X) = AX + C,$$

où $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que u est linéaire si et seulement si $C = 0$.

Ex 8 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On considère l'application :

$$T : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad T(X) = AX,$$

montrer que T est linéaire, puis exhiber une base de $\ker(T)$ dans le cas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} .$$

Ex 9 : Soit $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la dérivation

$$D(P) = P'.$$

Déterminer $\ker(D)$.

Ex 10 : Plus généralement, pour un entier $k \geq 1$, déterminer le noyau de

$$T_k : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \qquad T_k(P) = P^{(k)}.$$

Ex 11 : Soit $T : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$,

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

1) Montrer que T est linéaire.
2) Déterminer $\ker(T)$.
3) Déterminer si T est injectif et si T est surjectif.

Ex 12 : Soit $L : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$,

$$L(f) = f' - f.$$

1) Montrer que L est linéaire.
2) Déterminer $\ker(L)$.
3) Montrer que L est surjectif.