Feuille_Exo_10 : Applications linéaires

Ex 1 : Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On note f l'endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_1 + e_2$
Montrer que f est un automorphisme de E.

Ex 2 : On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM - MA$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer l'image de la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ par f.
3) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Ex 3 : f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe (x', y', z') tel que : $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 2x + 3y + 5z \\ z' = 3x + y + 4z \end{cases}$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *(pour une rédaction pas trop longue, utiliser* Coord_B*)*.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$

– –

Ex 4 : $(*)$ On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et φ l'application de E dans E par $\varphi(P) = P' + 3P$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2) Montrer que φ est bijective.

Ex 5 : $(**)$ On note $E = \mathbb{C}_n[X]$ et φ l'application de E dans E par $\varphi(P) = P' + 3P$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2) Montrer que φ est bijective.

Ex 6 : $(**)$ On note $E = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ et φ l'application de E dans E par $\varphi(f) = f' + 3f$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3) Montrer que φ est surjective.
4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi \circ \varphi)$.

Ex 7 : $(**)$ On note $E = \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et φ l'application de E dans E par $\varphi((u_n)) = (u_{n+1} + 3u_n)$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi \circ \varphi)$.

– –

Ex 8 : $(*)$ On note $\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_4[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$,

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$.
2) Déterminer une base du noyau de Δ.
3) Déterminer une base de l'image de Δ.

Ex 9 : $(**)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$,

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2) Déterminer une base du noyau de Δ.
3) Déterminer une base de l'image de Δ.

Ex 10 : $(***)$ On note $\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$,

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2) Déterminer une base du noyau de Δ.
3) Montrer que Δ est surjective.

Ex 11 : $(***)$ On note $\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & u_{n+1}-u_n \end{array}$,

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2) Déterminer une base du noyau de Δ.
3) Montrer que Δ est surjective.

– –

Ex 12 : Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes : *(On donnera si possible une base du noyau).*

1) On note $\mathcal{D}^2$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{D}^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f''-f \end{array}$$

2) On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1}-2u_n) \end{array}$$

3) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(2), P'(2), P''(2)\big) \end{array}$

4) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

Ex 13 : Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Parmi les affirmations suivantes, laquelle est équivalente à $g \circ f = 0$?

❶ $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ ❷ $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$ ❸ $\ker(g) \subset \mathrm{Im}(f)$ ❹ $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$

Ex 14 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
On note F l'ensemble des vecteurs invariants par f : $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$

1) Montrer que F est un sous-espace de E.
2) Montrer l'équivalence :

$$f^2 = f \iff \mathrm{Im}(f) \subset F$$

3) Connaissez-vous une application linéaire du plan vectoriel qui possède cette propriété $f \circ f = f$?

Ex 15 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1) Montrer l'équivalence :

$$f^2 = Id_E \iff \mathrm{Im}(f - Id_E) \subset \ker(f + Id_E)$$

2) Connaissez-vous une transformation de l'espace qui possède cette propriété $f \circ f = Id_E$?

Ex 16 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.
Montrer que f est inversible et exprimer f^{-1} en fonction de f.
Indication : On rappelle qu'une application de E dans F est bijective si, et seulement si, il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.