BCPST 2_A

Correction de la feuille Blitz_4 : Fonctions indicatrices.

Cocher les cases ou remplir les ..... : *(c'est un exercice de rapidité (10 minutes), vous avez le droit à un brouillon.)*

1. Valeur d'une indicatrice.

$\mathbb{1}_{[0,3]}(4) =$ 1 ☐ 0 ■ je ne sais pas ☐

$\mathbb{1}_{[0,3]}(1/2) =$ 1 ■ 0 ☐ je ne sais pas ☐

$\mathbb{1}_{2>3} =$ 1 ☐ 0 ■ je ne sais pas ☐

$\mathbb{1}_{\frac{7}{8}<\frac{8}{9}} =$ 1 ■ 0 ☐ je ne sais pas ☐

2. Avec des quantificateurs.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{x^2>0} = 1$ Vrai ☐ Faux ■ je ne sais pas ☐

$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{x^2\leqslant 0} = 1$ Vrai ■ Faux ☐ je ne sais pas ☐

$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{1}_{i^2=i} = 1 \iff i = 1 \text{ ou } i = 0$ Vrai ■ Faux ☐ je ne sais pas ☐ *(il y avait une erreur d'énoncé ici)*

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = x\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x)\right)$ Vrai ■ Faux ☐ je ne sais pas ☐

3. Union et intersection.

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. *Rappel sur une notation : $A \setminus B$: A privé de B*

$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ Vrai ☐ Faux ■ je ne sais pas ☐

$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$ Vrai ■ Faux ☐ je ne sais pas ☐

$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ Vrai ☐ Faux ■ je ne sais pas ☐

$\mathbb{1}_{A\cup B\cup C} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C)$ Vrai ■ Faux ☐ je ne sais pas ☐

$\mathbb{1}_{A\cap B\cap C} = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C)$ Vrai ■ Faux ☐ je ne sais pas ☐

4. Comptage.

Soient $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $A = \{2,3,5\}$

$\displaystyle\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) =$ 3 je ne sais pas ☐

$\displaystyle\sum_{x\in A} \mathbb{1}_{(x \text{ est pair})} =$ 1 je ne sais pas ☐

$\displaystyle\sum_{(i,j)\in E^2} \mathbb{1}_A(i)\mathbb{1}_A(j) =$ 9 je ne sais pas ☐

$\displaystyle\sum_{(i,j)\in E^2} \mathbb{1}_{i<j} =$ 15 je ne sais pas ☐

$\displaystyle\sum_{(i,j)\in E^2} \mathbb{1}_{i+j=6} =$ 5 je ne sais pas ☐

5. Probabilités.

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$

Soient A, B et C trois événements. *(On rappelle que $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$ sont des variables aléatoires)*

L'espérance de $\mathbb{1}_A$ vaut $\mathbb{P}(A)$	Vrai ■ Faux □	je ne sais pas □
$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$ suit une loi binomiale	Vrai □ Faux ■	je ne sais pas □
$\mathbb{1}_A . \mathbb{1}_B . \mathbb{1}_C$ suit une loi de Bernoulli	Vrai ■ Faux □	je ne sais pas □
$\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes si, et seulement si, A et B sont indépendants.	Vrai ■ Faux □	je ne sais pas □
$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) = 0$ si, et seulement si, A et B sont incompatibles.	Vrai □ Faux ■	je ne sais pas □
$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) \leqslant 1$ si, et seulement si, A et B sont incompatibles.	Vrai ■ Faux □	je ne sais pas □

6. Manipulation de sommes.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de réels et n un entier $\geqslant 10$.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{i\leqslant j} =$$

□ n

□ $n+1$

■ $\dfrac{n(n+1)}{2}$

□ $\dfrac{n(n-1)}{2}$

je ne sais pas □

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \mathbb{1}_{k>2} =$$

□ $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} u_k$

□ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$

■ $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} u_k$

je ne sais pas □

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \mathbb{1}_{k \text{ pair}} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2i}$$

Vrai ■ Faux □ je ne sais pas □

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathbb{1}_{i<j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\mathbb{1}_{j<i}$$

Vrai □ Faux ■ je ne sais pas □

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathbb{1}_{i=j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Vrai ■ Faux □ je ne sais pas □

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.\mathbb{1}_{i+j=k} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k-i}.\mathbb{1}_{1\leqslant k-i\leqslant n}$$

Vrai ■ Faux □ je ne sais pas □